MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Prof. Dr. Philip Welch

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 03.07.2002

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1
Sei $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ ein unendlicher rekursiver Baum.

(a) Beweisen Sie: Wenn $[T] = \{f\}$ gilt, so ist f rekursiv.

(b) Beweisen Sie, daß $[T]$ ein Element g besitzt, so daß $g \equiv_T A$ gilt, wobei A eine rekursiv abzählbare Menge ist.

Aufgabe 2
Es sei T eine nichtleere Teilmenge von $X^{<\mathbb{N}}$ ($X = 2$ oder $X = \mathbb{N}$).

Zeigen Sie: Wenn T ein perfekt Baum ist, so hat $[T]$ $2^{\mathbb{N}}$-viele Elemente.

Hinweis: Zeigen Sie, daß eine Injektion $F : 2^{\mathbb{N}} \to [T]$ existiert. Definieren Sie dafür zuerst eine Injektion $F_0 : 2^{<\mathbb{N}} \to T$, so daß $F_0(\sigma)|F_0(\tau)$ aus $\sigma|\tau$ folgt für alle $\sigma, \tau \in 2^{<\mathbb{N}}$.

Aufgabe 3
Vollenden Sie den Beweis aus der Vorlesung, daß es $2^{\mathbb{N}}$-viele (d.h. Kontinuum-viele) $\underline{a}, \underline{b}$ mit $\underline{a}|_T\underline{b}$ gibt.

Hinweis: In der Beweisskizze war noch zu zeigen, daß $[T]$ $2^{\mathbb{N}}$-viele unvergleichbare $f \in 2^{\mathbb{N}}$ enthält.

(a) Zeigen Sie, daß T <u>perfekt</u> ist.

(b) Zeigen Sie: Für $f, g \in [T]$ folgt $[f]_T|_T[g]_T$ aus $f \neq g$.

Aufgabe* 4
Sei $\{\underline{b}_n\}$ eine abzählbare Menge von nicht-rekursiven Graden. Beweisen Sie, daß eine abzählbare Menge von Graden $\{\underline{a}_n\}$ existiert, so daß gilt:

(i) $\forall m, n\, (n \neq m \Rightarrow \underline{a}_m|_T\underline{a}_n)$,

(ii) $\forall m, n\, (\underline{a}_m|_T\underline{b}_n)$.

Hinweis: Kombinieren Sie die Konstruktionen aus den Beweisen der Sätze 2 und 4 aus §4. Setzen Sie als Voraussetzungen:

$R_{\langle e,n,m\rangle} : \chi_{A_m} \neq \varphi_e^{B_n}$,
$S_{\langle e,n,m\rangle} : \chi_{B_m} \neq \varphi_e^{A_n}$,
$T_{\langle e,n,m\rangle} : \chi_{A_n} \neq \varphi_e^{A_m}(\text{ für } n \neq m)$.

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`