MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Prof. Dr. Philip Welch

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 26.06.2002

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabenblatt 9

Das Mathematische Institut sucht DRINGEND studentische Hilfskräfte für die Anfängervorlesungen. Interessierte Studenten mögen sich per e-mail oder Telephon bei Herrn Dr. Torsten Hefer (hefer@math.uni-bonn.de; 0228/73-5278) melden.

Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie, daß $B \in \Sigma_n$ aus $B \leq_m A \wedge A \in \Sigma_n$ folgt.

(b) A und B seien definiert durch

$\langle x, y\rangle \in A \Leftrightarrow \forall z < y\ R(x, y, z)$,

$\langle x, y\rangle \in B \Leftrightarrow \exists z < y\ R(x, y, z)$.

Zeigen Sie, daß $A, B \in \Sigma_n$ aus $R \in \Sigma_n$, und $A, B \in \Pi_n$ aus $R \in \Pi_n$ folgt.

Aufgabe 2

Die Mengen Fin, Cof und Rec seien definiert durch

$$\mathrm{Fin} = \{e \mid \mathrm{W}_e \text{ ist endlich}\},$$

$$\mathrm{Cof} = \{e \mid \overline{\mathrm{W}}_e \text{ ist endlich}\},$$

$$\mathrm{Rec} = \{e \mid \mathrm{W}_e \text{ ist rekursiv}\}.$$

Zeigen Sie, daß $\mathrm{Fin} \in \Sigma_2$, $\mathrm{Cof} \in \Sigma_3$ und $\mathrm{Rec} \in \Sigma_3$ gilt.

Aufgabe 3

Es gelte $n \geq 1$. Beweisen Sie, daß $B \leq_1 A$ aus $B \leq_m A$ mit $A = \emptyset^{(n)}$ folgt.

Bemerkung: Es ist auch möglich folgendes zu zeigen: Es gelte $n \geq 1$, $B \leq_1 A$ aus $B \leq_m A$ mit $B = \emptyset^{(n)}$ folgt. Mit Aufgabe 3 folgt daraus, daß man die Σ_n-Vollständigkeit von A statt mit $B \leq_1 A$ auch durch „$A \in \Sigma_n$ und für alle $B \in \Sigma_n$ gilt $B \leq_m M$“ zeigen kann.

Aufgabe 4

Beweisen Sie das

$$\mathrm{Tot} =_{def} \{e \mid \mathrm{W}_e = \mathbb{N}\},$$

Π_2-Vollständig ist ist.

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`