MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Prof. Dr. Philip Welch

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 19.06.2002

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie, daß die Menge

$$\{\langle e, \sigma, x, y, s\rangle \mid \varphi^{\sigma}_{e,s}(x) = y\}$$

rekursiv ist.

(b) Beweisen Sie, daß die Menge

$$\mathrm{L}_1 = \{\langle e, \sigma, x, y\rangle \mid \varphi^{\sigma}_{e}(x) = y\}$$

rekursiv abzählbar ist.

Aufgabe 2

Seien A und B beliebige Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. Es gilt $B \leq_{\mathrm{T}} A$.
2. Es existieren rekursive Funktionen f und g, so daß gilt:

$$x \in B \quad \Leftrightarrow \quad \exists \sigma[\sigma \in \mathrm{W}_{f(x)} \ \wedge \ \sigma \subset A],$$

$$x \notin B \quad \Leftrightarrow \quad \exists \sigma[\sigma \in \mathrm{W}_{g(x)} \ \wedge \ \sigma \subset A].$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1 mit $\varphi^{A}_{e} = \chi_B$ und $y = 1$ bzw $y = 0$, um f und g zu finden. Für die andere Richtung verwenden Sie den Komplementierungs-Satz („Complementation-Theorem").

Aufgabe 3

Beweisen Sie: $[A \oplus B]_{\mathrm{T}}$ ist die kleinste obere Schranke („least upper bound") der Grade („degrees") $\underline{a} = [A]_{\mathrm{T}}$ und $\underline{b} = [B]_{\mathrm{T}}$. Zu zeigen ist also:
Es sei $\underline{a} \cup \underline{b} = [A \oplus B]_{\mathrm{T}}$, dann gilt

1. $\underline{a} \leq_{\mathrm{T}} (\underline{a} \cup \underline{b})$.
2. $\underline{b} \leq_{\mathrm{T}} (\underline{a} \cup \underline{b})$.
3. $\forall \underline{c}[\underline{a} \leq_{\mathrm{T}} \underline{c} \wedge \underline{b} \leq_{\mathrm{T}} \underline{c} \ \Rightarrow \ (\underline{a} \cup \underline{b}) \leq_{\mathrm{T}} \underline{c}]$.

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`