MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Prof. Dr. Philip Welch

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 05.06.2002

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1
Zeigen Sie, daß es rekursive Funktionen $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt:

$$W_x \cup W_y = W_{f(x,y)} \quad \text{und} \quad W_x \cap W_y = W_{g(x,y)}.$$

Aufgabe 2
Zeigen Sie: Es existiert ein n mit $E_n = \{n\}$. (*Erinnerung:* $E_n = \operatorname{ran} \varphi_n$.)

Aufgabe 3
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
(a) Es existiert eine n mit $W_n = \{2n\}$.
(b) Es existiert eine n mit $W_n = \mathbb{N} \setminus \{n\}$.
(c) Es existiert eine n mit $W_n = \{x \mid \varphi_n(x) \uparrow\}$.
(d) Es existiert eine n mit $W_n = \{x \mid \exists y[x = 2y \wedge \varphi_n(y) \downarrow]\}$ und $W_n \neq \emptyset$.
(e) Es existiert eine n mit $W_n = \{x \mid \exists y[x = 2y \wedge \varphi_n(y) \downarrow]\}$ und $W_n = \{3\}$.

Aufgabe 4
Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt ein f mit $W_{f(x)} = \{f(x) + x\}$.

Aufgabe 5
Zeigen Sie: Es existiert kein $\varphi_e \in \mathcal{C}$ mit:
Wenn φ_x die charakteristische Funktion χ_F einer endlichen Menge F ist,
dann gilt $\varphi_e(x) \downarrow \max F$.
Hinweis: Definieren Sie eine Funktion φ_n mit

$$\varphi_n(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = \mu s[\varphi_{e,s}(n) \downarrow], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`