MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Prof. Dr. Philip Welch

Bonn, den 24.05.2002

# *Berechenbarkeitstheorie*

## Aufgabenblatt 6

**Aufgabe 1**
Sei $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{RM}}$ eine totale Funktion. Die Menge $B$ sei definiert durch

$$B := \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{ran} f = \{f(0), f(1), \cdots\}.$$

(a) Angenommen, $f$ sei strikt monoton (d.h. $f(n) < f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Beweisen Sie, daß dann $B \in \mathcal{C}_{\mathrm{RM}}$ gilt. (Zu zeigen ist $\chi_B \in \mathcal{C}_{\mathrm{RM}}$.)

(b) Was passiert ohne die Voraussetzung „$f$ ist strikt monoton“?

**Aufgabe 2**
Seien $g, h \in \mathcal{C}_{\mathrm{RM}}$ partielle Funktionen.

(a) Zeigen Sie, daß eine partielle Funktion $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{RM}}$ existiert, so daß gilt
   (i) $f(\gamma)\downarrow \quad \Leftrightarrow \quad g(\gamma)\downarrow \vee h(\gamma)\downarrow$.
   (ii) $f(\gamma)\downarrow \quad \Rightarrow \quad f(\gamma) = g(\gamma) \ \vee \ f(\gamma) = h(\gamma)$.

(b) Kann auch gefordert werden, daß
$$g(\gamma)\downarrow \quad \Rightarrow \quad f(\gamma) = g(\gamma)$$
gelten soll?

**Aufgabe 3**
Beweisen Sie, daß rekursive Funktionen $f$ und $g$ existieren, so daß für alle $x$ gilt:

$$\operatorname{ran} \varphi_{f(x)} = \operatorname{dom} \varphi_x,$$

$$\operatorname{dom} \varphi_{g(x)} = \operatorname{ran} \varphi_x.$$

**Aufgabe 4**
Beweisen Sie die Existenz zweier nichtrekursiven Mengen $A$ und $B$, die unter $\leq_m$ nicht vergleichbar sind.

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`