MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Prof. Dr. Philip Welch

Bonn, den 14.05.2002

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine partiell rekursive Funktion ψ, so daß

$$\varphi(x) \simeq \mu y[\psi(x,y)=0]$$

nicht partiell rekursiv ist.

(b) Warum widerspricht dieses Resultat nicht der μ-Abgeschlossenheit von $\mathcal{C}_{\mathrm{RM}}$?

Hinweis:
Überprüfen Sie die Definition von „μ-abgeschlossen“.
Definieren Sie $\psi(x,y)$ durch

$$\psi(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } y=1 \text{ oder } (y=0 \wedge \varphi_x(x)\downarrow) \text{ gilt.} \\ \uparrow & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie dann, daß K rekursiv ist, wenn $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathrm{RM}}$ gilt.

Aufgabe 2

Es sei E_n definiert durch

$$\mathrm{E}_n :=_{\mathrm{df}} \{x \mid \exists y\, \varphi_n(y)=x\} = \operatorname{ran}\varphi_n.$$

Zeigen Sie, daß „$n \in \mathrm{E}_n$“ nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

(a) Es existiert kein Algorithmus, der entscheidet, ob ein Programm P_e eine $\mathcal{C}_{\mathrm{RM}}$-Funktion $\varphi_e^{(1)}$ mit $\varphi_e^{(1)}(x)=x^2$ definiert.

(b) Es existiert kein Algorithmus, der für ein Paar von Indizes $u,v \in \mathbb{N}$ entscheidet, ob

$$\varphi_u^{(1)}(x) = \varphi_v^{(1)}(x)$$

gilt für alle x.

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`