MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Prof. Dr. Philip Welch

Bonn, den 07.05.2002

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1
Beweisen Sie Proposition 18:
Die Relationen P und Q sind primitiv rekursiv.
Dabei sind P und Q wie folgt definiert:

$$P(e, s, \vec{x}, z) :\Leftrightarrow \phi_{e,s}(\vec{x}) \simeq z,$$

$$Q(e, s, \vec{x}, z) :\Leftrightarrow \phi_{e,s}(\vec{x}) \downarrow .$$

Aufgabe 2
Die Funktion $f(x_1, x_2)$ sei partiell rekursiv. Finden Sie eine rekursive (d.h. <u>total</u> rekursive) Funktion $g(x_1, x_2)$, so daß gilt:

$$\phi_{g(e_1,e_2)}(x_1) = f(\phi_{e_1}(x_1), \phi_{e_2}(x_1)).$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie, daß eine primitiv rekursive Funktion $g(x_1, x_2, x_3)$ existiert, so daß gilt:

$$\phi_e^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \phi^{(1)}_{g(x_1,x_2,x_3)}(e)$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, daß keine rekursive Funktion $f(x)$ existiert, so daß gilt:

$$\phi_e(e) \downarrow \Rightarrow \; f(e) = \phi_e(e) + 1.$$

Aufgabe* 5
Eine partiell rekursive Funktion $g(x)$ heißt genau dann *erweiterbar* (=„extendable“), wenn eine total rekursive Funktion $f(x)$ existiert, so daß $g(x) \downarrow \Rightarrow \; f(x) = g(x)$ gilt.
Zeigen Sie unter Benutzung der Aussage von Aufgabe 4):
Es existiert keine rekursive Funktion $f(x)$, so daß gilt:

$$f(e) = \begin{cases} 1\,, \text{ wenn } \phi_e(x_1) \text{ erweiterbar ist.} \\ 0\,, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Finden Sie eine erweiterbare Funktion $k(x)$, so daß $h(x, t)$ partiell rekursiv ist, wobei $h(x, t)$ definiert ist durch

$$h(x,t) = \begin{cases} \phi_e(x) + 1\,, & \text{wenn } \phi_t(t) \downarrow. \\ k(x) & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`