Prikry–Forcing und einige Verallgemeinerungen

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)
der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

vorgelegt von
Jochen Löffelmann
aus Düsseldorf

Bonn 2001

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

1.Referent: Prof. Dr. Peter Koepke
2.Referentin: Priv.-Doz. Dr. Heike Mildenberger

Tag der Promotion: 22.5.2001

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Georg Cantors berühmter Satz über die Überabzählbarkeit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen [Can74] kann als Geburtsstunde der Mengenlehre gesehen werden. Seitdem ist die Frage nach der genauen Größe des Kontinuums und allgemeiner nach der Größe der Potenzmenge einer gegebenen Kardinalzahl κ eine zentrale Frage der Mengenlehre. Cantor vermutete die Kontinuumshypothese **CH**, d.h. dass $\mathbb{R}$ die kleinste überabzählbare Mächtigkeit ω_1 hat, konnte sie jedoch nicht beweisen. Vom Standpunkt der modernen Logik aus stellt sich sofort die Frage, *woraus* **CH** bewiesen werden soll.

Ernst Zermelo [Zer08b] stellte ein Axiomensystem zur Begründung der Mengenlehre vor, um seinen Beweis des Wohlordnungssatzes [Zer08a] zu verteidigen. Damit leistete er einen wichtigen Beitrag zu der von David Hilbert [Hil00] geforderten Grundlegung der Mathematik. Dieses Axiomensystem wurde – von Abraham Fraenkel und Thoralf Skolem ergänzt – unter der Bezeichnung **ZFC** als Grundlegung der Mengenlehre allgemein akzeptiert und tatsächlich benutzte Cantor im Wesentlichen **ZFC**.

Kurt Gödel ([Göd38], ausführlich dargestellt in [Göd40]) wies 1938 in L, dem inneren Universum der konstruktiblen Mengen, die allgemeine Kontinuumshypothese **GCH** (die Annahme, dass die Potenzmenge jeder Kardinalzahl κ die kleinst mögliche Mächtigkeit κ^+ hat) nach und zeigte so, dass sie konsistent ist relativ zu den Axiomen **ZFC** der Mengenlehre.[1]

Im Jahr 1963 entwickelte Paul Cohen [Coh63] die Forcing–Methode zur Konstruktion von Modellen der Mengenlehre mit weiteren Eigenschaften. Sei-

[1] Bereits 1931 hatte Gödel die Unerfüllbarkeit des Hilbert'schen Programms gezeigt [Göd31]. Bemerkenswert ist die Verwandtschaft der von Gödel verwendeten Methoden.

ne erste Anwendung war die Konstruktion eines Modells von **ZFC** $+\neg$**CH**.[2] Folglich ist **CH** in **ZFC** nicht beweisbar und somit *unabhängig* von **ZFC**.

Sehr schnell wurde Forcing auf andere Probleme angewandt und erwies sich als geeignete Methode, aus einem gegebenen Modell der Mengenlehre eine Erweiterung zu konstruieren. Damit erhält man relative Konsistenzbeweise der Form: Wenn das Axiomensystem **ZFC** widerspruchsfrei ist, dann auch eine Erweiterung **ZFC** $+\ \Phi$. (Absolute Konsistenzbeweise sind nach den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen nicht möglich, wenn das betrachtete Axiomensystem ausdrucksstark genug ist, d.h. die klassische Zahlentheorie beinhaltet.)

Ein weiterer fundamentaler Begriff der Mengenlehre wurde von Felix Hausdorff [Hau08] eingeführt: Die *Konfinalität* $cof(\kappa)$ einer Kardinalzahl κ ist definiert als die minimale Länge einer Folge von Ordinalzahlen kleiner κ, die unbeschränkt in κ ist.[3] Eine Zahl heißt *regulär*, wenn sie gleich ihrer Konfinalität ist, sonst heißt sie *singulär*.

Cohens Methode ist ein Beispiel für die Bedeutung dieser Unterscheidung: Seine Forcing–Konstruktion kann leicht verallgemeinert werden derart, dass die Potenzmenge regulärer Kardinalzahlen jede beliebige Größe annehmen kann, die nicht der Monotonie der Kardinalzahlexponentiation

$$\kappa \leq \lambda \rightarrow 2^\kappa \leq 2^\lambda$$

und Königs Lemma

$$cof(2^\kappa) > \kappa$$

widerspricht [Eas70].

Andererseits eignet sich Cohen–Forcing nicht, um die Potenzmenge einer singulären Kardinalzahl λ zu vergrößern, ohne bereits die Potenzmenge kleinerer Kardinalzahlen über λ^+ hinaus zu vergrößern, so dass in allen bis 1971 bekannten Modellen der Mengenlehre die Singuläre Kardinalzahlen Hypothese **SCH** galt. Sie besagt, dass die Potenzmenge singulärer Kardinalzahlen

---

[2]Cohen erhält zunächst nur für jede endliche Teilmenge Φ von **ZFC** ein Modell von $\Phi + \neg$**CH**. Für eine Legitimation unserer Sprechweise und eine klare Diskussion metamathematischer Fragen im Zusammenhang mit Forcing sei auf Kunens Buch [Kun80] verwiesen.

[3]Die Syntax der Definition entspricht der vieler sogenannter Kardinalzahlinvarianten oder Kardinalzahlcharakteristiken, deren Erforschung ein wichtiges Gebiet der modernen Mengenlehre ist.

den minimalen Wert annimmt, d.h. für singuläre λ gilt

$$2^\lambda = \sup\{\lambda^+, 2^\kappa \mid \kappa < \lambda\}.$$

Man beachte die Ähnlichkeit in den Formulierungen von **GCH** und **SCH**.

Nach dem Überdeckungssatz von Ronald Jensen ist zur Konstruktion eines Modells von **ZFC**$+\neg$**SCH** die Annahme *Großer Kardinalzahlen* notwendig. Große Kardinalzahlen sind Kardinalzahlen mit zusätzlichen Abschlusseigenschaften, wobei Groß sowohl in Bezug auf hohe Konsistenzstärke als auch im Sinne der Anordnung auf der Ordinalzahlskala verstanden werden kann. Die Existenz Großer Kardinalzahlen übersteigt nicht nur formal die Konsistenz von **ZFC**, sondern sie beeinflusst wesentlich die Struktur des Mengenuniversums. Große Kardinalzahlen haben sich als interessante Erweiterungen von **ZFC** erwiesen. Indem man bei Forcing–Konstruktionen mit Grundmodellen von Axiomensystemen der Form (**ZFC** $+ \exists\kappa\ \kappa$ Große Kardinalzahl) startet, lassen sich weitere relative Konsistenzresultate erzielen, wobei Große Kardinalzahlen als Skala dienen, da sie sich bezüglich ihrer Konsistenzstärke linear anordnen lassen.[4]

Das wohl bekannteste Beispiel einer Großen Kardinalzahl, eine *messbare Kardinalzahl*, wurde 1930 von Stanislaw Ulam eingeführt [Ula30]. Im Jahr 1968 schuf Karel Příkrý [Pri70] eine elegante Forcing–Konstruktion, die von einer messbaren Zahl κ ausgeht: Mit Prikry–Forcing werden Erweiterungen des Grundmodells erzeugt, wobei κ abzählbare Konfinalität bekommt, jedoch alle Kardinalitäten erhalten bleiben und das Universum unterhalb von κ unverändert bleibt. Das entscheidende in der Erweiterung neue Objekt ist eine *Prikry–Folge*, eine abzählbare in κ unbeschränkte Folge von Ordinalzahlen.

Prikry–Forcing wurde zum Archetypus vieler weiterer Konstruktionen und Verallgemeinerungen. Unter diesen ragen vor allem zwei heraus:

Magidor–Forcing [Mag78] ist ein Produkt einer Variante von Prikry–Forcing. Dabei ging Menachem Magidor von einer Folge von Ultrafiltern mit zusätzlichen Eigenschaften aus. In der Magidor–Erweiterung ist die im Grundmodell messbare Zahl κ singulär mit überabzählbarer Konfinalität. Magidor–Forcing ist schwächer als Prikry–Forcing in dem Sinne, dass es neue beschränkte Teilmengen von κ addiert. Dies ist keine technische Schwäche

[4]Eine umfassende Darstellung Großer Kardinalzahlen und ihrer Anwendungen bietet Akihiro Kanamoris Buch [Kan94].

der Konstruktion, sondern wird durch das Singular Cardinal Theorem von Jack Silver erklärt:

> Ist das kleinste Gegenbeispiel zu **GCH** eine singuläre Kardinalzahl, so hat diese abzählbare Konfinalität.

Dieser Satz in **ZFC** besitzt kein Analogon für reguläre Zahlen und kann nach den Ergebnissen von Easton auch keines haben. Er illustriert den immensen Unterschied im Verhalten singulärer und regulärer Kardinalzahlen.

Fast 20 Jahre später gelang es Moti Gitik und Menachem Magidor [GM92], Prikry–Forcing derart zu verallgemeinern, dass in der Erweiterung nicht nur eine, sondern gleichzeitig viele neue Prikry–Folgen existieren. Die komplizierte Konstruktion geht von einem Extender auf κ aus und die Anzahl der addierten Prikry–Folgen ist gerade die Länge dieses Extenders. Wenn man von einem Grundmodell von **ZFC+GCH** ausgeht, erhält man ein Modell von **ZFC+¬SCH**, da wiederum keine Kardinalzahlen kollabiert werden.

Die Forcing–Erweiterung ist durch die Konstruktion i.A. nicht vollständig beschrieben. Man weiss zwar z.B., dass die Erweiterung $V[G]$ das kleinste Modell von **ZFC** ist, das V umfasst und G enthält, jedoch ist der generische Filter G in vielen Fällen ein kompliziertes Gebilde. Daher sucht man oft nach einer einfachen Menge, etwa einer Menge x von Ordinalzahlen, so dass

$$V[G] = V[x]$$

ist, um die Forcing–Erweiterung einfach beschreiben zu können. Für Prikry–Forcing leistet dies die Prikry–Folge. Zusätzlich konnte Adrian Mathias [Mat73] Prikry–Folgen *im Grundmodell* kombinatorisch charakterisieren. Trotz der Verwandtschaft der erwähnten Konstruktionen steht eine Untersuchung von Magidor– und Gitik–Magidor–Forcing unter diesem Aspekt noch aus.

In dieser Arbeit zeigen wir, dass *Magidor–Folgen* zu Prikry–Folgen analoge Eigenschaften haben, jedoch keine Prikry–Folgen sind. Für Gitik–Magidor–Forcing ist die Situation komplizierter: Wir charakterisieren das System der Prikry–Folgen im Grundmodell, jedoch argumentieren wir, dass sich die Erweiterung dadurch nicht vollständig beschreiben lässt.

Zum Aufbau der Arbeit:

Die Bezeichnungen sind Standard. Trotzdem stellen wir zu Beginn (Kapitel 2) einige Notationen und für diese Arbeit wichtige Sätze zusammen.

Kapitel 3 dient der Darstellung von Prikry–Forcing und der Untersuchung der neuen Prikry–Folge in Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen. Dabei ist der Abschnitt über Ununterscheidbare nicht nur als Hilfsmittel interessant, sondern hat als Aussage über Strukturen mit Ununterscheidbaren einen eigenen Wert. Schließlich sind wir in der Lage, alle Modelle zwischen dem Grundmodell und der Prikry–Erweiterung durch reelle Zahlen im Grundmodell zu parametrisieren. Dies ist ein interessantes Strukturtheorem über Prikry–Forcing. Ähnliche Aussagen sind nur für wenige andere Forcing–Konstruktionen bekannt.

Die Konstruktion von Gitik und Magidor wird in Kapitel 4 vorgestellt. Die Einführung schwach normaler Ultrafilter erleichtert die Konstruktion des Extenders. Die Forcing–Halbordnung wird wesentlich vereinfacht. Insbesondere werden die Maß–1 verzweigenden Bäume in den Gitik–Magidor–Bedingungen in Analogie zu Prikry–Forcing einfach durch Mengen ersetzt. So können wir die von Gitik und Magidor [GM92] nur angedeuteten Beweise vollständig ausführen. Darüber hinaus erhalten wir eine kombinatorische Charakterisierung des hinzugefügten Systems neuer konfinaler Folgen analog zu Mathias' Resultat [Mat73] über Prikry–Forcing.

Magidor–Forcing wird in Kapitel 5 erarbeitet. Indem auch hier der Begriff einer *direkten* Erweiterung eingeführt wird (wie bei Prikry–Forcing üblich), kann ein volles Prikry–Lemma formuliert und bewiesen werden. Dadurch wird die Darstellung aus [Mag78] verbessert. Eine komplett neue Darstellung der Magidor–Halbordnung in Abschnitt 5.6 mit einer rekursiven Definition der Bedingungen verdeutlicht die Struktur von Magidor–Forcing. Das Produkt–Prikry–Lemma ermöglicht, verschiedene Prikry–ähnliche Forcings zu verknüpfen. Als Abschluss des Kapitels wird auch hier die neu hinzugefügte Folge kombinatorisch charakterisiert.

Am Anfang jeden Kapitels wird die jeweils benutzte große Kardinalzahl eingeführt. Dabei ist Ausgangspunkt eine elementare Einbettung des Universums V in ein anderes Modell von **ZFC**. Dies ist die moderne Sichtweise im Gegensatz zur kombinatorischen Einführung von messbaren Kardinalzahlen durch Ulam.

Ich bedanke mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Peter Koepke für viele Anregungen und Diskussionen. Frau Priv.–Doz. Dr. Heike Mildenberger danke ich für zahlreiche kritische Anmerkungen. Allen Mitgliedern der Abteilung für Mathematische Logik und Grundlagenforschung sei für die stets offene und gute Arbeitsatmosphäre gedankt, spezieller Dank gilt Herrn Manfred Burghardt für viele Jahre guter Nachbarschaft. Zu Dank bin ich meiner Mathematiklehrerin Frau Linda Stober (†) verpflichtet, die mein Interesse an der Mengenlehre geweckt hat. Frau Birgit Schmitz danke ich sehr für Trost und Ansporn.

Kapitel 2

Notationen

Sei ω die Menge der natürlichen Zahlen. Unendliche Ordinalzahlen werden mit griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots$ bezeichnet, wobei κ, λ meist für *Kardinalzahlen* stehen. Kardinalzahlen sind minimal in ihrer Mächtigkeit. Wir schreiben $card(\alpha)$ und $\overline{\overline{\alpha}}$ für die Mächtigkeit oder Kardinalität von α. Die Ordinalzahlen bilden die echte Klasse On.

Wir unterscheiden nicht zwischen endlichen Mengen $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}$, endlichen Tupeln $\langle\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\rangle$ und endlichen Folgen $a\colon n \to \mathrm{On}$. Ist $X \subseteq \mathrm{On}$ und $n < \omega$, so ist $[X]^n$ die Menge der Folgen mit Elementen aus X mit Ordnungstyp n, d.h. der aufsteigenden Folgen der Länge n. Oft identifizieren wir $[X]^n$ mit der Menge der streng monoton wachsenden Funktionen aus $\{f \mid f\colon n \to X\}$.

Es bezeichnet $a \frown b$ die Verkettung der endlichen Folgen a und b. Hat b genau ein Element α, so schreiben wir kurz $a \frown \alpha$ statt $a \frown \langle\alpha\rangle$.

Wir nehmen grundsätzlich das Fundierungsaxiom an, d.h. die von–Neumann–Stufen V_α aller Mengen von *Rang* kleiner als α schöpfen das Mengenuniversum V aus, $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$. Die Rangfunktion ist absolut.

Ein *Filter* auf κ ist eine Teilmenge der Potenzmenge Pot von κ, der gegenüber Obermengen und Durchschnitten seiner Elemente abgeschlossen ist, d.h. diese enthält. Ein bzgl. $\subseteq$ maximaler Filter heißt *Ultrafilter*. Wir betrachten in dieser Arbeit nur *freie* Ultrafilter, d.h. solche, die keine endlichen Mengen enthalten. Ein Ultrafilter U heißt $< \kappa$–abgeschlossen, wenn für jedes $\xi < \kappa$ der Schnitt jeweils ξ vieler Elemente von U in U ist.

Eine Kardinalzahl κ heißt *messbar*, wenn es einen $< \kappa$–vollständigen freien Ultrafilter U auf κ gibt. Die Aussage, dass eine messbare Kardinalzahl existiert, übersteigt die Konsistenzstärke von **ZFC**, insbesondere ist für messbares κ das Anfangsstück V_κ des Universums aller Mengen von Rang kleiner als κ selbst Modell von **ZFC**, d.h. wir hätten ein Modell der Mengenlehre gefunden, das selbst Menge ist.

Für alle Forcing–Konstruktionen übernehmen wir die Terminologie aus Kunens Buch [Kun80]. Wir stellen einige wichtige Begriffe und Fakten aus [Kun80] zusammen:

Ist $\mathcal{P}$ eine Forcing–Halbordnung, so nennen wir Elemente von $\mathcal{P}$ Bedingungen, wobei wir der Konvention folgen, dass eine kleinere Bedingung stärker ist bzw. mehr Informationen über die Erweiterung liefert. Ein Filter $G \subseteq \mathcal{P}$ in $\mathcal{P}$ heißt generisch über dem Grundmodell V, wenn er jede *dichte* Menge in V, d.h. eine, die unter jeder Bedingung ein Element hat, schneidet. Die Forcing–Erweiterung bezeichnen wir mit $V[G]$. Für jedes $x \in V[G]$ gibt es einen Namen $\dot{x}$ im Grundmodell, der durch G als x interpretiert wird, $x = \dot{x}^G$. Alle Elemente x des Grundmodells besitzen einen kanonischen Namen $\check{x}$, der durch jeden generischen Filter als x interpretiert wird. Bei Ordinalzahlen und bekannten einfachen Funktionen, z.B. geordnetes Paar, Minimum, die zwischen V und $V[G]$ absolut sind, lassen wir das Zeichen $\check{}$ oft weg. Das fundamentale Forcing–Theorem (Satz VII 3.5 aus [Kun80]) besagt, dass für jede Aussage φ, die in $V[G]$ gilt, eine Bedingung $p \in G$ existiert, so dass φ schon von p erzwungen wird, $p \Vdash \varphi$. Der Ausdruck $p \Vdash \varphi$ kann im Grundmodell entschieden werden.

Die Forcing–Erweiterung $V[G]$ eines Grundmodells V ist das kleinste **ZFC**–Obermodell von V, das G enthält.

Eine Antikette in einer Forcing–Halbordnung $\mathcal{P}$ ist eine Menge $A \subseteq \mathcal{P}$ mit paarweise *inkompatiblen* Elementen, d.h. solchen, die keine gemeinsame Verstärkung besitzen. Die κ–*c.c.* ist erfüllt, wenn alle Antiketten in $\mathcal{P}$ kleinere Mächtigkeit als κ haben. Ist die κ–c.c. erfüllt, so bleiben alle Kardinalzahlen größer und gleich κ *erhalten*, d.h. sie sind absolut zwischen V und $V[G]$.

Eine partielle Ordnung heißt $< \kappa$–abgeschlossen, wenn zu jedem $\kappa' < \kappa$ und zu jeder (in $\mathcal{P}$) absteigenden Folge $\langle p_\xi | \xi < \kappa' \rangle$ eine Bedingung p existiert, die alle diese p_ξ verstärkt. Ist eine Forcing–Halbordnung $< \kappa$–abgeschlossen, so bleiben Kardinalzahlen kleiner als κ erhalten.

Werden zwei Forcing–Erweiterungen hinter einander ausgeführt, $V \subseteq V[G_1] \subseteq V[G_1][G_2]$, so lässt sich $V[G_1][G_2]$ mittels der Produkthalbordnung als einfache Erweiterung von V konstruieren.

Kapitel 3

Prikry–Forcing

In diesem Kapitel wird ein Forcing vorgestellt, das von Karel Příkrý entwickelt wurde [Pri70]. Mit Hilfe einer elementaren Einbettung mit kritischem Punkt κ wird eine Forcing–Halbordnung definiert, so dass κ in der generischen Erweiterung singulär ist mit abzählbarer Konfinalität. Prikry–Forcing ist die Basiskonstruktion für alle Forcings dieser Arbeit, die in den weiteren Kapiteln auf verschiedene Arten iteriert und gekoppelt werden. Die Darstellung betont modelltheoretische Aspekte, das Aufspalten der partiellen Ordnung in zwei Typen von Basiserweiterungen soll Intuition für die späteren Verallgemeinerungen liefern.

Eine neue Untersuchung des Erweiterungsprozesses folgt im letzen Abschnitt. Alle Erweiterungen des Grundmodells, die in der Prikry–Erweiterung enthalten sind, werden durch die rellen Zahlen im Grundmodell parametrisiert.

3.1 Normale Ultrafilter

Wir führen zentrale Begriffe der gesamten Arbeit ein und stellen einige kombinatorische Hilfsmittel für dieses und spätere Kapitel zusammen. Alle Ergebnisse sind bekannt.

Definition 3.1.1 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und $n < \omega$.*

(1) *Eine Funktion $f\colon [\kappa]^n \to \kappa$ heißt regressiv, wenn gilt $\forall a \in [\kappa\backslash\{0\}]^n\ f(a) < \min(a)$. Eine Funktion $f\colon [\kappa \setminus \{0\}]^n \to \kappa$ heißt regressiv, wenn gilt $\forall a \in [\kappa]^{<\omega}\ f(a) < \min(a)$.*

(2) *Ein freier Ultrafilter U auf κ heißt normal, wenn er $<\kappa$-abgeschlossen ist und für alle einstelligen regressiven $f\colon \kappa \to \kappa$ ein $\alpha < \kappa$ existiert, so dass $f^{-1}[\{\alpha\}] \in U$.*

(3) *Sei $A_\alpha \subseteq \kappa$ für $\alpha < \kappa$. Dann ist der Diagonalschnitt von $\{A_\alpha | \alpha < \kappa\}$ definiert als*

$$\triangle_{\alpha<\kappa} A_\alpha := \{\beta < \kappa | \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} A_\alpha\}$$

Lemma 3.1.2 *Sei U ein $<\kappa$–vollständiger freier Ultrafilter auf κ. Dann ist U normal genau dann, wenn U abgeschlossen ist unter Diagonalschnitten.*

Regressive Funktionen wurden von Geza Fodor [Fod56] betrachtet, der einen Sonderfall ($\mathrm{dom}(f) = \kappa$) des folgenden Lemmas bewies. Frederick Rowbottom [Row71] zeigte die folgende wichtige kombinatorische Eigenschaft normaler Ultrafilter.

Lemma 3.1.3 *Sei U ein normaler Ultrafilter auf κ und $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ regressiv. Dann gibt es eine für f homogene Menge $H \in U$, d.h. es ist $f \restriction [H]^{<\omega}$ konstant.*

Die Beweise dieser Lemmata sind Standard und finden sich in den meisten Lehrbüchern über Mengenlehre. Wir werden in Kapitel 4 Verallgemeinerungen dieser Lemmata beweisen, die dort gegebenen Argumente liefern offensichtlich auch Beweise von 3.1.2 und 3.1.3.

Lemma 3.1.4 *Sei U ein normaler Ultrafilter auf κ und sei für jedes $\xi < \kappa$ eine Menge $P_\xi \subseteq \xi$ gegeben. Dann existiert eine Menge $x \subseteq \kappa$, so dass gilt*

$$\{\alpha < \kappa \mid x \cap \alpha = P_\alpha\} \in U.$$

Beweis: Wir nehmen o.B.d.A. an, dass 0 in keiner der Mengen P_ξ, $\xi < \kappa$ enthalten ist. Sei die Funktion $f : [\kappa]^2 \to \kappa$ definiert durch $f(\beta, \alpha) = 0$, falls $P_\alpha \cap \beta = P_\beta$ und $f(\beta, \alpha) = \xi$, falls $\xi = \min((P_\alpha \cap \beta) \triangle P_\beta)$. (Wir schreiben $\triangle$ für die symmetrische Differenz zweier Mengen, $A \triangle B := A \cup B \setminus A \cap B$.) Dann ist f regressiv. Sei nach Lemma 3.1.3 eine für f homogene Menge $H \in U$ gegeben.
BEHAUPTUNG 1: Es gilt $f \restriction [H]^2 = \{0\}$.

BEWEIS: Angenommen nicht, gelte etwa $f \restriction [H]^2 = \{\xi\}$, $\xi > 0$. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in H \setminus \xi$ mit $\gamma < \beta < \alpha$. Dann gilt

$$\xi = \min((P_\alpha \cap \beta) \triangle P_\beta) = \min((P_\beta \cap \gamma) \triangle P_\gamma) = \min((P_\alpha \cap \gamma) \triangle P_\gamma).$$

Falls $\xi \in P_\alpha \setminus P_\beta$, so folgt $\xi \in P_\alpha \setminus P_\gamma$ und somit $\xi \notin (P_\beta \triangle P_\gamma)$. Widerspruch. Falls umgekehrt $\xi \in P_\beta \setminus P_\alpha$, so folgt ebenso $\xi \in P_\gamma \setminus P_\alpha$ und wiederum $\xi \notin (P_\beta \triangle P_\gamma)$. Widerspruch und Behauptung 1 ist bewiesen.

Wir definieren

$$x := \bigcup_{\alpha \in H} P_\alpha.$$

BEHAUPTUNG 2: Die Menge x leistet das Verlangte.
BEWEIS: Seien $\alpha, \beta \in H$, $\beta < \alpha$. Sei $\gamma < \beta$ beliebig. Dann gilt $P_\alpha \cap \gamma = P_\beta \cap \gamma$ und aus $\gamma < \beta < \alpha$ folgt $P_\alpha \cap \beta = P_\beta$. Insbesondere gilt $P_\beta \subseteq P_\alpha \subseteq x$. Da α und β beliebig in H waren, folgt nun aus $P_\alpha \subseteq \alpha$ auch $x \cap \alpha = P_\alpha$ für alle $\alpha \in H$. Also ist $\{\alpha < \kappa \mid x \cap \alpha = P_\alpha\} \supseteq H \in U$. q.e.d.

Das Lemma besagt u.a. dass κ *ineffable* ist. Dieser Begriff wurde u.a. von Jensen und Kunen bei der Untersuchung von L und insbesondere von kombinatorischen Prinzipien wie $\diamond$ eingeführt.

3.2 Ununterscheidbare

Aus der Modelltheorie stammt der Begriff der *Ununterscheidbaren* für eine Struktur $\mathcal{M}$. Er wurde von Jack Silver [Sil71] in die Mengenlehre eingebracht. Dabei interessiert man sich nur für einen bestimmten Typ, nämlich sogenannte *Ordnungsununterscheidbare*, die wir kurz als Ununuterscheidbare bezeichnen.

Definition 3.2.1 *Eine Menge $I \subseteq \mathrm{On}$ heißt Menge von Ununterscheidbaren für eine Struktur $\mathcal{M}$, wenn folgendes gilt: Für jede Formel $\varphi(\vec{v})$ in der Sprache von $\mathcal{M}$ mit n freien Variablen $\vec{v} = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ und für alle n-Tupel $a, b \in [I]^n$, $a = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $b = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ mit $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ und $\beta_1 < \ldots < \beta_n$ gilt*

$$\mathcal{M} \models \varphi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{M} \models \varphi[\beta_1, \ldots, \beta_n].$$

Eine einfache Anwendung des Kompaktheitssatzes der Modelltheorie zusammen mit dem Satz von Ramsey liefert Modelle mit unendlichen Mengen von Ununterscheidbaren (siehe [CK90], Satz 3.3.10). Dieser Satz ist ein reiner Existenzsatz und gibt keine weiteren Informationen über das Modell und die Ununterscheidbaren. Im Gegensatz dazu erhalten wir aus der Normalität eines Ultrafilters direkt eine Menge von Ununterscheidbaren.

Lemma 3.2.2 *Sei U ein $< \kappa$–vollständiger normaler Ultrafilter auf κ und sei $\mathcal{M}$ eine Struktur in einer abzählbaren Sprache und sei $\kappa \subseteq \mathcal{M}$. Dann existiert eine Menge $I \in U$ von Ununterscheidbaren für $\mathcal{M}$.*

Beweis: Sei $\{\varphi_i | i < \omega\}$ Aufzählung aller Formeln der Sprache von $\mathcal{M}$, wobei in φ_i höchstens die Variablen $v_1, \ldots, v_{n(i)}$ frei seien und $n(i) \leq i$. Wir betrachten nun die Wahrheitswertefunktion $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to 2 \subseteq \kappa$ gegeben durch $f(a_1, \ldots, a_i) = 1$, wenn $\mathcal{M} \models \varphi_i(v_1, \ldots, v_{n(i)})$ und 0, wenn nicht. Dann ist f o.B.d.A. regressiv (sonst lässt sich f auf höchstens abzählbar vielen Stellen mit $\min(\vec{a}) \leq 1$ abändern). Nach Lemma 3.1.3 gibt es nun eine homogene Menge $I \in U$, d.h. $f \restriction [I]^{<\omega}$ ist konstant. Damit ist I Menge von Ununterscheidbaren für $\mathcal{M}$. q.e.d.

Umgekehrt ist natürlich jede Menge I von Ordnungsununterscheidbaren z.B. für die Struktur $\langle \kappa, \in, f \rangle$ eine homogene Menge für f (wobei f geeignete Funktion mit $\mathrm{dom}(f) = [\kappa]^{<\omega}$).

Wir nennen Ununterscheidbare *gut*, wenn sie ununterscheidbar bleiben bei Hinzunahme von kleineren Ordinalzahlen als Parameter. Ist z.B. I eine Menge von Ununterscheidbaren für eine Struktur $\mathcal{M}$, so ist auch die verschobene Menge $I_{+1} := \{\alpha + 1 \mid \alpha \in I\}$ eine Menge von Ununterscheidbaren, die jedoch nicht gut sind.

Satz 3.2.3 *Sei U ein $< \kappa$–vollständiger normaler Ultrafilter auf κ und sei $\mathcal{M}$ eine Struktur in einer abzählbaren Sprache und sei $\kappa \subseteq \mathcal{M}$. Dann existiert eine Menge $I \in U$ von guten Ununterscheidbaren für $\mathcal{M}$.*

Beweis: Wir modifizieren den Beweise von Lemma 3.2.2.

Für jedes endliche Parametertupel $a \subseteq \kappa$ lässt sich die Konstruktion aus obigem Beweis von Lemma 3.2.2 durchführen. Da es für jedes $\alpha < \kappa$ nur $\overline{\overline{\alpha}}$ viele Parametertupel unterhalb von α gibt, können wir die $< \kappa$–Vollständigkeit des Ultrafilters nutzen, um Mengen in U zu erhalten, die Ununterscheidbar sind bzgl. Parametern kleiner als α. Die Abgeschlossenheit von U unter

Diagonalschnitten sichert nun die Existenz einer Menge guter Ununterscheidbarer für die gegebene Struktur in U. q.e.d.

In dieser Arbeit werden durch die Verwendung von Ununterscheidbaren einige komplizierte kombinatorische Argumente vereinfacht. Wie in der Mengenlehre üblich werden Ununterscheidbare, deren Existenz durch Satz 3.2.3 gesichert ist, als Hilfsmittel gesehen. Meist wird auf die Definition direkt zugegriffen. Die folgenden Lemmata ermöglichen nicht nur weitere Anwendungen, sondern haben als Anfänge einer Theorie über Strukturen mit Ununterscheidbaren einen eigenen Wert.

Lemma 3.2.4 *Sei $I \subseteq \kappa$ eine Menge von (guten) Ununterscheidbaren für eine Struktur $\mathcal{M}$. Dann gilt für jedes $n < \omega$ und für jede Formel φ mit genau n freien Variablen:*

$$(\exists a \in [I]^n \ \varphi[a] \longrightarrow \forall a \in [I]^n \ \varphi[a])^{\mathcal{M}}.$$

Beweis: Dies ist nur eine einfache Umformung der Definition. Gäbe es n–Tupel $a, b \in [I]^n$, so dass $\mathcal{M} \models \varphi[a]$, aber $\mathcal{M} \models \neg\varphi[b]$, so wären a und b in $\mathcal{M}$ durch φ unterscheidbar. q.e.d.

Lemma 3.2.5 *Sei $I \subseteq \kappa$ eine Menge von (guten) Ununterscheidbaren für eine Struktur $\mathcal{M}$. Sei $n < \omega$ und $f \in \mathcal{M}$ eine in $\mathcal{M}$ definierbare Funktion mit $\mathrm{dom}(f) = [I]^n$. Dann existiert eine Teilmenge von n, der Träger von f, geschrieben $\mathrm{supp}(f)$, so dass*

(1) *f nur von Argumentwerten mit Index in $\mathrm{supp}(f)$ abhängt und*

(2) *f als Funktion von ${}^{\mathrm{supp}(f)}I$ betrachtet injektiv ist.*

Formal ausgedrückt heißt das: Für alle aufsteigenden Tupel $a, b \in [I]^n$, $a = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle$, $b = \langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \rangle$ gilt

$$f(a) = f(b) \leftrightarrow \forall i \in \mathrm{supp}(f) \ \alpha_i = \beta_i.$$

Dabei steht $\leftarrow$ für Aussage 1 und $\rightarrow$ für 2.

Beweis: Induktion über $n < \omega$. Für $n = 1$ folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 3.2.4, wenn der Ausdruck $f(\alpha) = f(\beta)$ betrachtet wird.

Für den Induktionsschritt sei $f \colon [I]^{n+1} \to \mathcal{M}$ und die Behauptung sei wahr für n.

FALL 1: $\exists \alpha, \beta \in I \, \exists a \in [I]^n \; \max(a) < \alpha < \beta \; \wedge \; f(a \frown \alpha) = f(a \frown \beta)$.

Dann ist $a \frown \langle \alpha, \beta \rangle \in [I]^{n+2}$ und nach Lemma 3.2.4 haben wir

$$\forall \alpha, \beta \in I \, \forall a \in [I]^n \; \max(a) < \alpha < \beta \; \rightarrow \; f(a \frown \alpha) = f(a \frown \beta).$$

Also hängt f nicht vom Argumentwert an der Stelle n ab und wir können definieren $f_n \colon [I]^n \to \mathcal{M}$, $f_n(a) := f(a \frown \alpha)$ für ein beliebiges $\alpha > \max(a)$. Wir setzen $\mathrm{supp}(f) := \mathrm{supp}(f_n)$ und erhalten nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathrm{supp}(f) \; \alpha_i = \beta_i \; & \leftrightarrow \; \forall i \in \mathrm{supp}(f_n) \; \alpha_i = \beta_i \\ & \leftrightarrow \; f_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = f_n(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}) \\ & \leftrightarrow \; f(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = f(\beta_0, \ldots, \beta_n). \end{aligned}$$

FALL 2: nicht Fall 1, d.h.

$$\forall \alpha, \beta \in I \, \forall a \in [I]^n \; \max(a) < \alpha < \beta \rightarrow f(a \frown \alpha) \neq f(a \frown \beta). \qquad (*)$$

Für jedes hinreichend große $\alpha \in I$ lässt sich eine Funktion

$$f_\alpha \colon \{a \in [I]^n \mid \max(a) < \alpha\} \rightarrow \mathcal{M} \text{ durch } f_\alpha(a) = f(a \frown \alpha)$$

definieren. Wir wenden für jedes $\alpha \in I$ und jedes $i < n$ Lemma 3.2.4 auf den Ausdruck $\varphi_i \equiv i \in \mathrm{supp}(f_\alpha)$ an und sehen, dass alle f_α denselben Träger haben. Daher können wir setzen $\mathrm{supp}(f) := \mathrm{supp}(f_\alpha) \cup \{n\}$ für ein genügend großes $\alpha \in I$.

Es bleibt Aussage 2 zu zeigen: Seien dazu $a, b \in [I]^{n+1}$ aufsteigende Tupel $a = \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$, $b = \langle \beta_0, \ldots, \beta_n \rangle$, verschieden an einer Stelle in $\mathrm{supp}(f)$. Falls $\alpha_n \neq \beta_n$ ist, o.B.d.A. $\beta_n > \alpha_n$, nehmen wir an, dass $f(a) = f(b)$ wäre. Aus der Ununterscheidbarkeit folgt nun $f(b) = f(a) = f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}, \beta)$ für alle $\beta \geq \beta_n$ im Widerspruch zu $(*)$. Wenn andererseits $\alpha_n = \beta_n =: \gamma$, dann ist $\alpha_i \neq \beta_i$ an einer Stelle $i \in \mathrm{supp}(f_\gamma)$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt $f_\gamma(a \restriction n) \neq f_\gamma(b \restriction n)$. Daraus folgt

$$f(a) = f(a \restriction n \frown \gamma) = f_\gamma(a \restriction n) \neq f_\gamma(b \restriction n) = f(b \restriction n \frown \gamma) = f(b)$$

q.e.d.

3.3 Prikry–Forcing

In diesem Abschnitt wird die Prikry–Halbordnung mit Hilfe eines normalen Ultrafilters definiert. Charakteristisch für Prikry–Forcing und alle Verallgemeinerungen ist das Prikry–Lemma (Satz 3.3.7).

Sei das Grundmodell V Modell von **GCH**. Sei für den Rest dieses Kapitels $\pi\colon V \to M$ eine elementare Einbettung mit *kritischem Punkt* $crit(\pi) = \kappa$ in ein transitives Modell M von **ZFC** mit ${}^{\kappa}M \subseteq M$. (Als kritischen Punkt einer elementaren Einbettung π bezeichnen wir die kleinste Ordinalzahl κ, die von π bewegt wird. Für diese muss gelten $\kappa < \pi(\kappa)$.) Wir definieren

$$U := \{x \in V | \kappa \in \pi(x)\}.$$

Lemma 3.3.1 *Es ist U ein $<\kappa$-vollständiger normaler Ultrafilter auf κ.*

Beweis: Es ist U Filter, denn für $x, y \in U$ gilt $\kappa \in \pi(x) \cap \pi(y) = \pi(x \cap y)$ wegen der Elementarität von π, also $x \cap y \in U$. Abschluss gegen Obermengen und $\kappa \in U$ sind klar. Weiter folgt die Ultrafiltereigenschaft aus $\pi(y) = \pi(\kappa) \setminus \pi(x)$, wenn y das κ-Komplement von x ist.

Für die $<\kappa$-Vollständigkeit sei $\alpha < \kappa$ und $x = \{x_i | i < \alpha\} \subseteq U$, d.h. $\kappa \in \pi(x_i)$ für alle $i < \alpha$. Betrachte x als Funktion mit $\mathrm{dom}(x) = \alpha$. Wegen $\alpha < crit(\pi)$, also $\pi(\alpha) = \alpha$ hat $\pi(x)$ auch Definitionsbereich α und es gilt $\pi(x_i) = \pi(x)(i)$ für alle $i < \alpha$. Es folgt

$$\kappa \in \bigcap_{i<\alpha} \pi(x_i) = \bigcap_{i<\alpha} \pi(x)(i) = \bigcap_{i<\alpha} \pi(x)(\pi(i)) = \pi(\bigcap_{i<\alpha} x_i)$$

und so $\bigcap x \in U$.

Sei nun $f\colon \kappa \to \kappa$ regressiv. Dann gilt $(\pi(f)\colon \pi(\kappa) \to \pi(\kappa) \text{ regressiv})^M$. Wir setzen $\kappa_0 := \pi(f)(\kappa) < \kappa$. Dann ist $\kappa \in \{\alpha < \pi(\kappa) | \pi(f)(\alpha) = \kappa_0\} = \pi(f^{-1}[\kappa_0])$ und U ist normal. q.e.d.

Definition 3.3.2 *Wir definieren die Prikry-Bedingungsmenge $\mathcal{P}_P$ wie folgt: Es sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_P$ genau dann, wenn $\tilde{p}$ ein Paar (p, P) ist mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $p \in [\kappa]^{<\omega}$,

(2) $P \in U$,

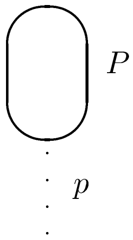

Abbildung 3.1: Eine Prikry–Bedingung

(3) $\max(p) < \min(P)$.

Die erste Komponente p ist eine endliche Approximation an die neue abzählbare Folge, die unbeschränkt in κ sein soll. Die Menge P ist das Reservoir für mögliche Verlängerungen von p, sie ist groß im Sinne des normalen Ultrafilters U. Da wir p nur enderweitern wollen, sind nach (3) alle möglichen Verlängerungspunkte größer als $\max(p)$.

Wie schon angekündigt, identifizieren wir endliche Mengen p von Ordinalzahlen mit ihren aufsteigenden Aufzählungen und betrachten sie als Funktionen mit $\operatorname{dom}(p) \in \omega$.

Definition 3.3.3 *Seien $\tilde{p} = (p, P)$ und $\tilde{q} = (q, Q)$. Auf $\mathcal{P}_P$ werden nun zwei Halbordnungen $\leq_r$ und $\leq_d$ definiert durch*

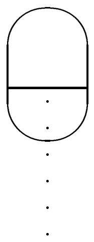

Abbildung 3.2: Eine Reflektionserweiterung $\tilde{q}$

Es ist $\tilde{q}$ Reflektionserweiterung von $\tilde{p}$, wir schreiben $\tilde{q} \leq_r \tilde{p}$, genau dann, wenn folgende Bedingungen gelten:

(1) *$q \supseteq p$, (die Folge q ist Enderweiterung von p,)*

(2) $q \setminus p \subseteq P$,

(3) $Q = P \setminus (\max(p) + 1)$.

Es heißt $\tilde{q}$ *direkte Erweiterung von* $\tilde{p}$*, geschrieben* $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ *genau dann, wenn*

(1) $q = p$,

(2) $Q \subseteq P$.

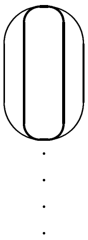

Abbildung 3.3: Eine direkte Erweiterung $\tilde{q}$

Schließlich wird die Prikry-Halbordung $\leq$ *definiert durch* $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ *genau dann, wenn es endlich viele Bedingungen* $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n \in \mathcal{P}_P$ *gibt, so dass* $\tilde{p} = \tilde{p}_1, \tilde{q} = \tilde{p}_n$ *und für alle* $i < n$ *die Bedingung* $\tilde{p}_{i+1}$ *direkte oder Reflektionserweiterung von* $\tilde{p}_i$ *ist.*

Beim Übergang zu einer Reflektionserweiterung einer Bedingung $\tilde{p}$ werden (endlich viele) Punkte aus dem Reservoir P gewählt und P nur soweit verkleinert, dass wieder eine Prikry–Bedingung entsteht. Die Folge q ist Enderweiterung von p.

Für eine direkte Erweiterung wird die endliche Folge nicht verändert und nur die Menge P weiterer Verlängerungspunkte verkleinert.

Bemerkungen (1) Offensichtlich sind $\leq_r$ und $\leq_d$ Halbordnungen. Die Transitivität von $\leq$ ist klar, da die Verkettung zweier endlicher Folgen immer eine endliche Folge ergibt. Also ist auch $\leq$ Halbordnung auf $\mathcal{P}_P$.

(2) Statt beliebiger endlicher Folgen reicht es, die Verkettung $\leq_d \circ \leq_r$ dieser Relationen zu betrachten, genauer: Aus $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ folgt $\exists \tilde{s}\ (q, Q) \leq_d \tilde{s} \wedge \tilde{s} \leq_r (p, P)$, es erfüllt $(q, P \setminus (\max(q) + 1))$ diese Bedingung.

Lemma 3.3.4 *Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_P$ und $\alpha < \kappa$. Dann existiert eine Erweiterung $\tilde{q}$ von $\tilde{p}$, so dass* $\max(q) > \alpha$.

Beweis: Falls $\alpha < \max(p)$, so ist nichts zu tun. Andernfalls wähle $\beta \in P$ so, dass $\beta > \alpha$. Setze $q := p \frown \{\beta\}$ und $Q := P \setminus (\beta + 1)$. Dann ist $\tilde{q} := (q, Q)$ die gesuchte Bedingung. q.e.d.

Lemma 3.3.5 *Die Halbordnung $\leq_d$ ist $< \kappa$-abgeschlossen.*

Beweis: Sei $\langle (p, P_\beta) \mid \beta < \alpha \rangle$ für ein $\alpha < \kappa$ eine bezüglich $\leq_d$ fallende Folge in $\mathcal{P}_P$. Dann ist $P := \bigcap_{\beta<\alpha} P_\beta \in U$, weil U gegen $< \kappa$-Schnitte abgeschlossen ist. Offensichtlich gilt $(p, P) \leq_d (p, P_\beta)$ für alle $\beta < \alpha$. q.e.d.

Bemerkung: Die Menge $\mathcal{P}_P$ ist bezüglich der partiellen Ordnung $\leq_r$ noch nicht einmal ω-abgeschlossen, dem zufolge auch nicht bezüglich $\leq$.

Lemma 3.3.6 *Die Forcing–Halbordnung $\mathcal{P}_P$ erfüllt die κ^+–c.c.*

Beweis: Jeweils zwei Bedingungen $\tilde{p} = (p, P)$ und $\tilde{q} = (p, Q)$ mit gleicher erster Komponente sind kompatibel, denn $(p, P \cap Q)$ ist eine gemeinsame Erweiterung dieser beiden. Andererseits gilt $card([\kappa]^{<\omega}) = \kappa$ und das Lemma ist bewiesen. q.e.d.

Um zu zeigen, dass eine Forcing–Erweiterung Kardinalzahlen erhält, sind typischerweise Antiketten–Bedingungen (hier die κ^+–c.c. für Kardinalzahlen größer als κ) und Abschlusseigenschaften der Forcing–Halbordnung wichtige technische Hilfsmittel. Der folgende Satz ermöglicht, die gute Abgeschlossenheit von $\leq_d$ zu nutzen, um Kardinalzahl–Bewahrung unterhalb von κ zu zeigen. Er ist typisch für alle Forcing–Konstruktionen, die in dieser Arbeit behandelt werden.

Satz 3.3.7 (Prikry-Lemma) *Sei φ eine Aussage der Forcing-Sprache. Sei $\tilde{p} = (p, P) \in \mathcal{P}_P$. Dann existiert eine direkte Erweiterung $\tilde{r} \leq_d \tilde{p}$ in $\mathcal{P}_P$, die φ entscheidet, d.h. für die gilt: $\tilde{r} \Vdash \varphi$ oder $\tilde{r} \Vdash \neg\varphi$.*

Wir nennen hier und im Folgenden eine Struktur *hinreichend gut*, wenn sie genügend Axiome der Mengenlehre erfüllt, so dass alle folgenden Argumente in dieser Struktur durchgeführt werden können. Insbesondere sollen alle Konstanten, die in den folgenden Beweisen auftreten, in dieser Struktur enthalten sein.

Beweis des Prikry–Lemmas: Sei $\mathcal{M}$ eine hinreichend gute Struktur in einer Sprache der 1. Stufe mit $\kappa \subseteq \mathcal{M}$. Insbesondere seien $(\mathcal{P}_P, \leq), \tilde{p}$ und φ als Konstanten in $\mathcal{M}$ enthalten. Dann existiert nach 3.2.3 eine Menge von guten Ununterscheidbaren $I \in U$ für $\mathcal{M}$.

Wir setzen $\tilde{r} := (p, P \cap I)$. Es gilt $\tilde{r} \in \mathcal{P}_P$, da I und P sich als Ultrafiltermengen schneiden. Offensichtlich gilt $\tilde{r} \leq_d \tilde{p}$.
Behauptung: $\tilde{r}$ entscheidet φ.
Beweis: Angenommen nicht, dann existieren Bedingungen $\tilde{r}^+, \tilde{r}^- \leq \tilde{r}$, die φ verschieden entscheiden, d.h. $\tilde{r}^+ \Vdash \varphi$ und $\tilde{r}^- \Vdash \neg\varphi$. O.B.d.A. haben r^+ und r^- gleiche Länge, etwa $\ell n(r^+) = \ell n(r^-) = \ell n(p) + n$ und die Ultrafiltermengen R^+ und R^- sind gleich. (Sonst gehe zum Schnitt $R^+ \cap R^-$ über.) Nun sind $r^+ \setminus p, r^- \setminus p \in [I]^n$ im Widerspruch zur Ununterscheidbarkeit der Elemente von I. q.e.d.

3.4 Die Prikry–Erweiterung

Sei in diesem Abschnitt $G \subseteq \mathcal{P}_P$ ein generischer Filter über V und $V[G]$ die Prikry–Erweiterung des Grundmodells V.

Das Prikry-Lemma ermöglicht, die guten Abschlusseigenschaften von $\leq_d$ zu nutzen und sichert so, dass keine beschränkten Teilmengen von κ hinzugefügt werden.

Lemma 3.4.1 *Es gilt:* $(V_\kappa)^V = (V_\kappa)^{V[G]}$.

Beweis: Die Inklusion $\subseteq$ ist klar, für $\supseteq$ sei zunächst $x \in V[G]$ eine beschränkte Teilmenge von κ, etwa $x \subseteq \alpha < \kappa$. Dann existiert nach dem Forcing–Theorem ein Name $\dot{x}$ in V mit $x = \dot{x}^G$ und eine Bedingung $\tilde{p} = (p, P) \in G$, die dies erzwingt, $\tilde{p} \Vdash \dot{x} \subseteq \check{\alpha}$. Es reicht, eine Bedingung $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ und eine Menge $y \in V$ zu finden, so dass $\tilde{q} \Vdash \dot{x} = \check{y}$. Nach dem Prikry–Lemma finden wir für jedes $\beta < \alpha$ eine Bedingung $\tilde{q}_\beta = (p, Q_\beta)$, die den Ausdruck $\check{\beta} \in \dot{x}$ entscheidet. Wir definieren

$$\tilde{q} := (p, \bigcap_{\beta<\alpha} Q_\beta).$$

Dann ist $\tilde{q} \in \mathcal{P}_P$ wegen der $< \kappa$–Abgeschlossenheit von U (und damit der von $\leq_d$). Offensichtlich gilt $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ und wenn wir definieren $y := \{\beta < \alpha \,|\, \tilde{q}_\beta \Vdash \check{\beta} \in \dot{x}\}$, dann ist y im Grundmodell V und es folgt $\tilde{q} \Vdash \check{y} = \dot{x}$.

Für beliebiges $x \in (V_\kappa)^{V[G]}$ folgt die Behauptung nun durch Induktion über den Rang von x: Nach Induktionsvoraussetzung gilt $x \subseteq (V_\kappa)^V$, genauer $x \subseteq (V_\xi)^V$ für $\xi = \mathrm{rang}(x)$. Sei $f \in (V_\kappa)^V$ eine injektive Funktion $f : (V_\xi)^V \to \kappa$. Dann ist f ebenso in $(V_\kappa)^{V[G]}$ und $f[x]$ ist eine beschränkte Teilmenge von κ, die nach dem vorigen Absatz in $(V_\kappa)^V$ ist. Folglich gilt auch $x = f^{-1}[f[x]] \in (V_\kappa)^V$.

q.e.d.

Satz 3.4.2 *Forcing mit $\mathcal{P}_P$ bewahrt Kardinalitäten und es gilt*

$$V[G] \models cof(\kappa) = \omega.$$

Beweis: Kardinalitäten $< \kappa$ bleiben nach Lemma 3.4.1 erhalten.

Angenommen, κ würde kollabiert, sei etwa $f : \kappa \to \lambda,\ \lambda < \kappa$ eine Bijektion in $V[G]$. Dann würden bereits alle V–Kardinalzahlen, die zwischen λ und κ liegen, kollabiert. Da κ Limeszahl war, müsste es (unendlich viele) solche Zahlen geben. Widerspruch, also bleibt κ als Kardinalzahl erhalten.

Kardinalitäten $> \kappa$ bleiben wegen der κ^+–c.c. von $\mathcal{P}_P$ erhalten und der Rest des Theorems folgt aus der folgenden Behauptung.

Behauptung: Die Menge $x := \bigcup\{p \in [\kappa]^{<\omega} \mid \exists P\ (p, P) \in G\}$ ist konfinal in κ und hat Ordnungstyp ω.

Beweis: Als Vereinigung endlicher Ordinalzahlmengen, die durch Enderweiterung geordnet sind, hat x Ordnungstyp $\leq \omega$. Weiter ist nach 3.3.4 für jedes $\alpha < \kappa$ die Menge $D_\alpha = \{(p, P) \in \mathcal{P}_P \mid \alpha < \max(p)\}$ dicht in $\mathcal{P}_P$, denn jede Ultrafiltermenge $P \in U$ ist unbeschränkt in κ. Also ist x konfinal in κ und damit unendlich, so dass $\mathrm{otp}(x) = \omega$. q.e.d.

Nach dem Überdeckungssatz (Covering Theorem) von Jensen ist zur Konstruktion einer Forcing–Erweiterung, die alle Kardinalitäten erhält, aber Konfinalitäten ändert, höhere Konsistenzstärke als die von **ZFC** notwendig. Nach Ergebnissen von Dodd und Jensen (The Covering Lemma for K) ist die Existenz eines inneren Modells mit einer messbaren Zahl für ein solches Forcing notwendig. Daher ist Prikry–Forcing optimal in dem Sinn, dass die verwendete Konsistenzstärke für das erzielte Resultat notwendig ist.

3.5 Prikry–Folgen

Sei weiter $G \subseteq \mathcal{P}_P$ ein generischer Filter über dem Grundmodell V. In diesem Abschnitt wird die Folge

$$x := \bigcup\{p \in [\kappa]^{<\omega} \mid \exists P\ (p, P) \in G\}$$

aus obigem Beweis genauer untersucht. Sie enthält alle Informationen über den generischen Filter G, genauer lässt sich G aus x redefinieren. Wir beweisen

Satz 3.5.1 *Ist $G \subseteq \mathcal{P}_P$ generischer Filter über V und sei x wie oben. Dann gilt*

$$V[x] = V[G].$$

Beweis: Die Inklusion $\subseteq$ ist klar nach Definition von x. Für die umgekehrte Inklusion definieren wir $G_x \subseteq \mathcal{P}_P$ durch

$$G_x := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_P \mid p \text{ ist Anfangsstück von } x \text{ und } x \setminus p \subseteq P\}.$$

Nun reicht folgende
Behauptung: Es gilt $G_x = G$.
Beweis: Sei $\tilde{p} \in G$, dann gilt $p \subseteq x$, denn $(p, P) \in G$. Wenn nun $\xi \in x \setminus p$ ist, dann $\xi \in q$ für ein $\tilde{q} = (q, Q) \in G$. Sei $\tilde{r} \in G$ gemeinsame Verstärkung von $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$, dann gilt gilt $\xi \in r$ und $r \setminus p \subseteq P$, also $\xi \in P$ nach Definition von $\leq_r$. Dies zeigt $x \setminus p \subseteq P$ und somit $G \subseteq G_x$.

Seien nun $\tilde{p}, \tilde{q} \in G_x$ beliebig. Dann sind p und q Anfangsstücke von x, wir nehmen o.B.d.A. an, dass $p \subseteq q$ ein Anfangsstück ist. Dann gilt $q \setminus p \subseteq x \setminus p \subseteq P$, also $(q, P \setminus \max(q) + 1) \leq_r \tilde{p}$ und ferner $x \setminus q \subseteq Q$, also auch $x \setminus q \subseteq P \cap Q \in U$. Es folgt, dass $\tilde{r} := (q, P \cap Q) \in G_x$ und $\tilde{r}$ gemeinsame Erweiterung von $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ ist.

Sei schließlich $\tilde{p} \in G_x$, wir nehmen aber an, dass $\tilde{p} \notin G$. Dann existiert ein $\tilde{q} \in G$, so dass $\tilde{q} \Vdash \tilde{p} \notin \dot{G}$. Oben wurde $G \subseteq G_x$ gezeigt, also haben wir $\tilde{q} \in G_x$ und da G_x Filter ist, finden wir ein $\tilde{r} \in G_x$, so dass $\tilde{r} \leq \tilde{p}, \tilde{q}$ gilt. Einerseits muss $\tilde{r}$ als Verstärkung von $\tilde{q}$ erzwingen, dass $\tilde{p} \notin \dot{G}$ ist, andererseits gilt $\tilde{r} \Vdash \tilde{r} \in \dot{G}$ und wegen $\tilde{r} \leq \tilde{p}$ auch $\tilde{r} \Vdash \tilde{p} \in \dot{G}$. Widerspruch, wir haben $G_x \subseteq G$ bewiesen. q.e.d.

In jeder Forcing–Erweiterung $V[G]$ ist der generische Filter definierbar, etwa über einen kanonischen Namen für G, siehe [Kun80]. Die Bedeutung des Satzes liegt darin, dass wir dazu nur die Folge x benötigen.

Lemma 3.5.2 *Die Folge x aus dem letzten Satz hat folgende Eigenschaft: Für alle Teilmengen $X \subseteq \kappa$ im Grundmodell V gilt*

$$X \in U \text{ genau dann, wenn } x \setminus X \text{ endlich ist.}$$

Beweis: : Sei $X \subseteq \kappa$, $X \in V$.

$\longrightarrow$: Gelte $X \in U$. Die Menge $D := \{(p, P) \mid P \subseteq X\}$ ist dicht in $\mathcal{P}_P$, denn $(p, P \cap X) \in D$ ist eine Verstärkung von (p, P). Sei nun $(q, Q) \in D \cap G$, dann ist q ein Anfangsstück von x und es gilt $x \setminus q \subseteq Q \subseteq X$. Die Richtung von links nach rechts ist bewiesen, da q als endlich vorausgesetzt war.

$\longleftarrow$: Sei $x \setminus X$ endlich. Angenommen $X \notin U$, dann gilt $\bar{X} := \kappa \setminus X \in U$ und aus dem eben bewiesenen folgt $x \setminus \bar{X}$ endlich. Dies bedeutet allerdings, dass $x = (x \setminus X) \cup (x \setminus \bar{X})$ endlich ist. Widerspruch. q.e.d.

Daraus folgt unmittelbar ein Korollar.

Korollar 3.5.3 *Der Ultrafilter U ist in der Erweiterung $V[x]$ aus x und* $\mathrm{Pot}(\kappa)$ *definierbar.*

Das Lemma erlaubt außerdem, dass wir uns vom generischen Filter lösen und für einen normalen Ultrafilter U definieren: Eine Folge x heißt *Prikry–Folge* für U über dem Grundmodell V genau dann, wenn gilt

(1) $x \subseteq \kappa$, $\mathrm{otp}(x) = \omega$ und

(2) $\forall X \in \mathrm{Pot}(\kappa) \cap V \;\; X \in U$ genau dann, wenn $x \setminus X$ endlich ist.

Wir haben gezeigt, dass Forcing mit $\mathcal{P}_P$ eine Prikry–Folge addiert. Es stellt sich die natürliche Frage, ob jede Prikry–Folge durch ein Prikry–Forcing erzeugt werden kann. Diese Frage wird beantwortet durch folgenden Satz von Mathias [Mat73].

Satz 3.5.4 *Sei U ein normaler Ultrafilter auf κ und sei x eine Prikry–Folge für U über dem Grundmodell V. Dann ist x $\mathcal{P}_P$–generisch über V.*

Dabei heißt eine Menge x generisch für ein Forcing $\mathcal{P}$ über V, wenn sich aus x ein $\mathcal{P}$–generischer Filter über V definieren lässt.

Beweis: Wir definieren wiederum

$$G_x := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_P \mid p \text{ ist Anfangsstück von } x \text{ und } x \setminus p \subseteq P\}$$

Wie in Satz 3.5.1 ist G_x Filter und es reicht folgende

BEHAUPTUNG: G_x ist $\mathcal{P}_P$-generisch über V.
BEWEIS: Es reicht zu zeigen, dass für jede dichte offene Menge $D \subseteq \mathcal{P}_P$ gilt $G_x \cap D \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{M}$ eine hinreichend gute Struktur in einer abzählbaren Sprache der ersten Stufe mit $\kappa \subseteq \mathcal{M}$, die $\mathcal{P}_P, \tilde{p}$ und D als Konstanten enthält. Sei $I \in U$ eine Menge von guten Ununterscheidbaren für $\mathcal{M}$.

Für $a \in [\kappa]^{<\omega}$ sei nun $A_a \in U$ so gewählt, dass gilt $(a, A_a) \in D$, falls ein solches A_a existiert. Andernfalls sei $A_a := \kappa$. Wir definieren

$$P := I \cap \triangle_{\xi<\kappa} \bigcap_{\max(a)=\xi} A_a.$$

Dann ist $P \in U$, da es für jedes $\xi < \kappa$ nur weniger als κ viele endliche Folgen a mit $\max(a) = \xi$ gibt. Für alle $a \in [\kappa]^{<\omega}$ gilt nun $P \setminus (\max(a) + 1) \subseteq A_a \setminus (\max(a) + 1) \subseteq A_a$. Weil D als offen vorausgesetzt war, folgt daraus nach Definition von $\leq_d$ für alle $a \in [\kappa]^{<\omega}$:

$$\exists A \ (a, A) \in D \rightarrow (a, P \setminus (\max(a) + 1)) \in D. \qquad (*)$$

Da x nach Voraussetzung eine Prikry–Folge für U ist, finden wir ein Anfangsstück p von x, so dass $x \setminus p \subseteq P$ ist. Wir betrachten $\tilde{p} = (p, P \setminus (\max(p) + 1)) \in \mathcal{P}_P$. Weil D dicht ist, existiert ein endliches $q \subseteq P \setminus (\max(p) + 1)$, etwa mit Länge $n < \omega$ und ein $Q \subseteq P \setminus (\max(q) + 1)$, so dass gilt $(p \cup q, Q) \in D$. Wegen $(*)$ gilt bereits

$$(p \cup q, P \setminus (\max(q) + 1)) \in D.$$

Wegen der Ununterscheidbarkeit der Elemente von $I \supseteq P$ gilt dies bereits für alle Folgen aus $[P \setminus (\max(p) + 1)]^n$. Sei also $r \subseteq x \setminus p \subseteq P$ ein Anfangsstück von $x \setminus p$ der Länge n, dann gilt:

$$\tilde{r} := (p \cup r, P \setminus (\max(r) + 1)) \in D.$$

Es ist nach Konstruktion $p \cup r$ ein Anfangsstück von x und nach Wahl von p auch $x \setminus p \subseteq P$, also gilt $\tilde{r} \in G_x$. q.e.d.

Da jede unendliche Teilfolge von x auch Prikry–Folge für denselben Ultrafilter U ist, erhalten wir das

Korollar 3.5.5 *Sei x eine Prikry–Folge für U über V. Dann ist jedes $y \in [x]^\omega$ Prikry–generisch über V.*

Umgekehrt kann x nicht Prikry–Folge für zwei verschiedene Ultrafilter U_1, $U_2 \subseteq \mathrm{Pot}(\kappa)$ sein. Seien etwa $X_1 \in U_1$ und $X_2 \in U_2$ disjunkte Mengen, die sich zu κ ergänzen, so wäre $x = (x \setminus X_1) \cup (x \setminus X_2)$ endlich.

Wenn wir eine Prikry–Folge x (für ein U über einem Modell V) und die generische Erweiterung $V[x]$ betrachten, so stellt sich die Frage, ob jedes transitive Modell M von **ZFC**, $V \subseteq M \subseteq V[x]$ durch eine Teilfolge von x gegeben ist.

3.6 Zwischenmodelle einer Prikry–Erweiterung

Sei V ein Grundmodell von **ZFC** und V' eine Erweiterung von V. Ein Modell M der Mengenlehre, für das gilt $V \subseteq M \subseteq V'$ nennen wir *Zwischenmodell*.

In diesem Abschnitt wird die Frage nach Zwischenmodellen für Prikry–Forcing untersucht. Oben wurde bereits bemerkt, dass jede Teilfolge einer Prikry–Folge ebenfalls generisch ist, und zwar für dieselbe Halbordnung. Hauptresultat dieses Abschnitts ist eine Umkehrung dieser Aussage.

3.6.1 Zwischenmodelle bei Forcing–Erweiterungen

Bei allen Forcing–Erweiterungen $V[G]$ eines Grundmodell V ist die Frage nach Zwischenmodellen M, so dass $V \subseteq M \subseteq V[G]$ gilt, natürlich. Es gilt der

Satz 3.6.1 *Sei V ein Modell der Mengenlehre und $V[G]$ eine Forcing–Erweiterung durch eine partielle Ordnung $\mathcal{P} \in V$. Sei $X \in V[G]$. Dann gilt $V \subseteq V[X] \subseteq V[G]$ und es gibt ein Forcing $\mathcal{Q}$, so dass $V[X] = V[H]$ für einen $\mathcal{Q}$–generischen Filter H.*

Der übliche Beweis basiert auf einer Darstellung von Forcing durch vollständige Boole'sche Algebren und ist nicht konstruktiv. (Siehe [Jec78], Abschnitt 25.) Man erhält sogar, dass die vollständige Boole'sche Algebra, die das Zwischenmodell erzeugt, eine Teilalgebra der ursprünglichen Forcing–Algebra ist ([Jec78], Lemma 25.3). Es stellt sich die umgekehrte Frage, wieviele Zwischenmodelle es gibt und wie sich diese beschreiben lassen.

Dazu betrachten wir zwei Beispiele bekannter Forcing–Halbordnungen: Cohen–Forcing und Sacks–Forcing. Durch beide wird eine neue reelle Zahl

$x \subseteq \omega$ hinzugefügt und die generische Erweiterung ist bereits durch diese bestimmt, $V[x] = V[G]$, wobei G der jeweilige generische Filter ist.

In Bezug auf Zwischenmodelle unterscheiden sie sich wesentlich. Die Cohen–Halbordnung ist isomorph zu ihrem eigenen Produkt, daher gibt es zu jeder Cohen–Erweiterung $V[x]$ stets ein Zwischenmodell von **ZFC**, das selbst Cohen–Erweiterung des Grundmodells ist. Darüber hinaus ist $V[x]$ Cohen–Erweiterung dieses Zwischenmodells, d.h. es gibt Cohen–reelle Zahlen $x_1, x_2 \subseteq \omega$, so dass

$$V[x] = V[x_1][x_2].$$

(Siehe [Kan94], Proposition 10.21)

Die durch Sacks–Forcing [Sac71] erzeugte reelle Zahl $x \subseteq \omega$ ist minimal über dem Grundmodell in dem Sinne, dass für jedes $y \subseteq \mathrm{On}$, $y \in V[G]$ gilt

$$y \in V \text{ oder } x \in V[y].$$

Es gibt also kein echtes Zwischenmodell zwischen dem Grundmodell und einer Sacks–Erweiterung. (Siehe auch [Jec78], Theorem 64)

Wir konzentrieren uns auf Prikry–Forcing. Analog zu den diskutierten Beispielen ist die Erweiterung durch die hinzu gefügte Prikry–Folge $x \subseteq \kappa$ bestimmt (Satz 3.5.1) und diese Folge hat minimalen Rang in $V[G] \setminus V$ (Lemma 3.4.1).

Nach Korollar 3.5.5 gibt es zu einer gegebenen Teilfolge $y \subseteq x$ ein Zwischenmodell $V[y]$, das selbst Prikry–Erweiterung des Grundmodells ist. Ist $x \setminus y$ unendlich, so ist $V[y]$ ein echtes Zwischenmodell, $V[y] \subset V[x]$. Andererseits erhalten wir für jede endliche Modifikation von y offenbar dasselbe Zwischenmodell. Jedoch kann $V[x]$ nicht Prikry–Erweiterung des Zwischenmodells $V[y]$ sein, denn κ ist in $V[y]$ nicht messbar. In diesem Sinne ist Prikry–Forcing von Cohen–Forcing wesentlich unterschieden und es stellen sich folgende Fragen:

1. Gibt es eine Variante von Prikry–Forcing, so dass alle Zwischenmodelle der Form $V[y], y \subseteq x$ mit dem Grundmodell V oder $V[x]$ übereinstimmen?

2. Sind alle Zwischenmodelle unterhalb von $V[x]$ von der Form $V[y]$ für ein $y \subseteq x$?

Wir werden Frage 2 vollständig positiv beantworten.

Einige der folgenden Argumente gehen auf Anregungen von Moti Gitik zurück. [Koe00]

Sei von nun an U ein normaler Ultrafilter auf der messbaren Zahl κ. Sei $\mathcal{P}_P$ die Prikry–Halbordnung und $G \subseteq \mathcal{P}_P$ ein generischer Filter. Sei g die erzeugte Prikry–Folge. (Wir sehen g wieder als Teilmenge von κ oder Funktion mit Definitionsbereich ω an.)

Wir werden zeigen, dass die Klasse

$$\{M \mid V \subseteq M \subseteq V[g], M \models \mathbf{ZFC}\}$$

aller Zwischenmodelle durch die Menge aller Teilfolgen (modulo endlicher Teilstücke) von g und damit durch $\mathrm{Pot}(\omega)/fin$ parametrisiert ist.

3.6.2 Reduktion auf Teilmengen von κ

Definition 3.6.2 *Seien $X, Y \in V[g]$. Dann heißt X* definierbar aus *Y über dem Grundmodell V, wenn $X \in V[Y]$ ist. Wenn darüber hinaus auch $Y \in V[X]$ ist, dann heißen X und Y* äquidefinierbar *über V.*

Dieser Begriff ist eine natürliche Verallgemeinerung der Konstruktibilitätsgrade über L.

In mehreren Schritten wird die Frage der Definierbarkeit eines $X \in V[g]$ auf Teilfolgen von g reduziert. Da jedes Modell von **ZFC** durch seine Mengen von Ordinalzahlen charakterisiert ist ([Jec78], Abschnitt 15), reicht es, mit einem $X \subseteq \mathrm{On}$ zu beginnen.

Lemma 3.6.3 *Jede Teilmenge $X \subseteq \mathrm{On}$, $X \in V[g]$ ist mit einer ω–Folge von Ordinalzahlen über V äquidefinierbar.*

Beweis: Sei $X \in V[G]$ eine Menge von Ordinalzahlen, $X = \dot{X}^G$. Wir fassen X als charakteristische Funktion auf, sei $\lambda > \sup X$ und $X \colon \lambda \to \{0, 1\}$ mit

$$\xi \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } \xi \notin X \\ 1 & \text{falls } \xi \in X. \end{cases}$$

Für jedes $n < \omega$ definieren wir Funktionen $X_n\colon \lambda \to 2$ durch

$$X_n(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \exists P\ \tilde{p} = (g \restriction n, P) \in \mathcal{P}_P, \tilde{p} \Vdash \dot{X}(\xi) = 0 \\ 1 & \text{falls } \exists P\ \tilde{p} = (g \restriction n, P) \in \mathcal{P}_P, \tilde{p} \Vdash \dot{X}(\xi) = 1 \end{cases}$$

Aufgrund des Prikry–Lemmas ist diese Fallunterscheidung vollständig. Daher ist X_n für jedes $n < \omega$ auf ganz λ definiert und eindeutig, denn zwei Bedingungen mit gleicher erster Komponente sind immer kompatibel. Es gilt $X_n \in V$.

Behauptung: Es gilt $X = \lim_{n\to\infty} X_n$.
Beweis: Sei $\xi < \lambda$. Wir beginnen mit dem Fall $\xi \in X$. Sei nach dem Forcing–Theorem $\tilde{p} = (p, P) \in G$ eine Bedingung, so dass $\tilde{p} \Vdash \xi \in \dot{X}$. Dann ist p ein Anfangsstück von g, etwa $p = g \restriction n_\xi$. Also existiert ein P, so dass $(g \restriction n_\xi, P) \Vdash \dot{X}(\xi) = 1$ und wir haben $X_{n_\xi}(\xi) = 1$.

Sei nun $m < \omega$ eine beliebige natürliche Zahl größer als n_ξ. Wir betrachten $\tilde{q} := (g \restriction m, P \setminus (g_m + 1))$. Wir benutzen $P \supseteq g \setminus p$ und sehen, dass $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ und $\tilde{q} \in G$ gilt. Daher erzwingt $\tilde{q}$ ebenfalls $\dot{X}(\xi) = 1$ und es folgt $X_m(\xi) = X(\xi)$.

Der Fall $\xi \notin X$ verläuft analog. Also gibt es für alle $\xi < \lambda$ ein $n_\xi < \omega$, so dass für alle $m \geq n_\xi$ gilt: $X_m(\xi) = X(\xi)$ was zu zeigen war.

Für jedes $n < \omega$ kann X_n in einer Ordinalzahl α_n kodiert werden, etwa vermöge einer Wohlordnung in V von $\mathrm{Pot}(\lambda)$ mit Ordnungstyp 2^λ. Dann sind X und $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$ äquidefinierbar über V. q.e.d.

Antiketten–Bedigungen der Forcing–Halbordnung sorgen für gute Überdeckung der Erweiterung durch das Grundmodell. Dies ermöglicht, von nicht zu langen Folgen zu Teilmengen von κ zu kommen.

Lemma 3.6.4 *Jede Teilmenge $X \subseteq \mathrm{On}$, $X \in V[g]$ vom Ordnungstyp ω ist über V mit einer Teilmenge von κ äquidefinierbar.*

Beweis: Wir wenden ein Überdeckungsargument an: Sei $X \in V[g]$ eine Menge von Ordinalzahlen vom Ordnungstyp ω, $X = \dot{X}^G$. Sei $\lambda \in \mathrm{On}$ eine obere Schranke für X. Wir sehen X als Funktion mit $\mathrm{dom}(X) = \omega$ an. Sei $\tilde{p} \in G$ nach dem Forcing–Theorem eine Aussage, die dies erzwingt, $\tilde{p} \Vdash \dot{X}\colon \omega \to \lambda$. Wir definieren im Grundmodell V eine Funktion $Y\colon \omega \to \mathrm{Pot}(\lambda)$ durch

$$Y(n) := \{\xi < \lambda \mid \exists \tilde{q} \leq \tilde{p}\ \tilde{q} \Vdash \dot{X}(n) = \xi\}.$$

Wir beweisen folgende Behauptungen:

1. Für alle $n < \omega$ gilt $X(n) \in Y(n)$.

   Beweis: Sei $\xi = X(n)$. Dann existiert ein $\tilde{q} \in G$, das dies erzwingt, $\tilde{q} \Vdash \dot{X}(n) = \xi$. O.B.d.A. gilt $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ (sonst gehen wir zu einer gemeinsamen Verstärkung in G über). Also $\xi \in Y(n)$.

2. Für alle $n < \omega$ gilt $card(Y(n)) \leq \kappa$.

   Beweis: Sei $n < \omega$. Sei $A_n \in V$ eine Funktion $A_n \colon Y(n) \to \mathcal{P}_P$, so dass für alle $\xi \in Y(n)$ gilt: $A_n(\xi) \leq \tilde{p},\ A_n(\xi) \Vdash \dot{X}(n) = \xi$. Dann gilt
   Beh: $A_n[Y(n)]$ ist eine Antikette in $\mathcal{P}_P$.
   Bew: Angenommen nicht, seien $\xi, \zeta \in Y(n), \xi \neq \zeta$ so, dass $A_n(\xi)$ und $A_n(\zeta)$ kompatibel sind. Dann gäbe es eine gemeinsame Verstärkung $\tilde{r} \leq A_n(\xi), A_n(\zeta)$ und es erzwänge $\tilde{r} \Vdash \xi = \zeta$, Widerspruch.

   Das Argument zeigt auch, dass A_n injektiv ist. Nach der κ^+–c.c. im Grundmodell muss nun $card(Y(n)) \leq \kappa$ gelten.

Es folgt

$$card(\text{range}(Y)) = card(\bigcup_{n<\omega} Y(n)) = \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

Sei $f \in V$ eine Bijektion $f \colon \text{range}(Y) \leftrightarrow \kappa$. (Wir benötigen das Auswahlaxiom.) Dann gilt $f[X] =: \bar{X} \subseteq \kappa$ und X und $\bar{X}$ sind äquidefinierbar über V.
q.e.d.

Diese beiden Lemmata lassen sich entsprechend auch für Magidor–Forcing (siehe Kapitel 5) beweisen. Denn das letzte Lemma nutzt nur die Antiketten–Bedingung der Forcing–Halbordnung aus. Der Beweis verläuft genau so, wenn X beliebige Kardinalität $< \kappa$ hat.

Im Beweis von Lemma 3.6.3 spielt das Prikry–Lemma eine entscheidende Rolle, für Magidor–Forcing müssen für jedes endliche $a \subseteq \alpha$ (α die neue Konfinalität von κ) Approximationen X_a an die gegebene Menge X definiert und ein gerichteter Limes gebildet werden.

3.6.3 Erraten von Teilmengen von κ

Dieser Teilabschnitt dient dem Beweis des zentralen Lemmas, das wir zunächst formulieren.

Lemma 3.6.5 *Sei $V[G]$ Prikry–Erweiterung des Grundmodells V und sei $g \subseteq \kappa$ die von G induzierte Prikry–Folge. Sei $X \in V[G]$, $X = \dot{X}^G$ eine Teilmenge von κ. Dann existiert eine Teilfolge $c \subseteq g$, so dass c und X über V äquidefinierbar sind.*

Zusammen mit den Reduktionsschritten aus dem letzten Teilabschnitt sind damit alle Mengen der Erweiterung durch Teilmengen der Prikry–Folge parametrisiert.

Der Satz wird bewiesen, indem wir rekursiv die gesuchte Folge $c \subseteq g$ konstruieren. Dazu versuchen wir die Menge X im Grundmodell zu erraten, indem wir sie durch kanonische Namen $X(\langle c_0, \dots, c_n \rangle)$ auf Anfangsstücken approximieren. Dabei bleibt c_n im Schritt n möglicherweise undefiniert. In diesem Fall überprüfen wir in späteren Schritten, ob wir c_n nachdefinieren müssen, um ganz X aus c definieren zu können.

Für den Rest dieses Teilabschnitts argumentieren wir in einer hinreichend guten Struktur $\mathcal{M}$, die $(\mathcal{P}_P, \leq), \dot{X}, \Vdash$ enthält und für die $I \in U$ eine Menge von guten Ununterscheidbaren ist.

Wir nehmen an, dass $(\emptyset, I) \in G$ gilt. Der allgemeine Fall folgt dann, da wir ein $\tilde{p} \in G$ finden, so dass $g \setminus p \subseteq I$ ist. Dieses endliche Anfangsstück ist in V, so dass c und $c \cup p$ sowie X und $X \cup p$ jeweils äquidefinierbar sind über V.

Wir benutzen folgende Schreibweise: Für jedes Element α von I bezeichne $\alpha^{\oplus}$ den Nachfolger von α in I, kurz $\alpha^{\oplus} = \min(I \setminus (\alpha + 1))$.

Wir führen kanonische Namen für Teilmengen von κ ein.

Wir definieren für jedes $\alpha \in I$ eine Menge $y(\alpha) \in V$, $y(\alpha) \subseteq \alpha$ durch

$$y(\alpha) := \{\beta < \alpha \mid (\langle \alpha \rangle, I \setminus (\alpha + 1)) \Vdash \beta \in \dot{X}\}.$$

Sei

$$X(\emptyset) := \bigcup_{\alpha \in I} y(\alpha) \subseteq \kappa.$$

Alle Definitionen sind in V und somit gilt $X(\emptyset) \in V$.

Allgemein definieren wir für jede Folge $a \in [I]^{<\omega}$ und jedes $\alpha \in I$, $\alpha > \max(a)$ eine Menge $y(a, \alpha) \subseteq \alpha$ durch

$$y(a, \alpha) := \{\beta < \alpha \mid (a \frown \alpha, I \setminus (\alpha + 1)) \Vdash \beta \in \dot{X}\}.$$

Sei nun für jedes $a \in [I]^{<\omega}$ definiert

$$X(a) := \bigcup_{\alpha \in I \setminus (\max(a)+1)} y(a, \alpha).$$

Wieder sind alles Definitionen im Grundmodell, so dass $X(a) \in V$ gilt.
Die Definitionen von $y(\alpha)$ und $X(\emptyset)$ sind offenbar Sonderfälle dieser Vereinbarung.

Wir stellen einige einfache Eigenschaften zusammen.

Lemma 3.6.6 *Sei $a \in [I]^{<\omega}$ und sei $\alpha \in I \setminus (\max(a)+1)$. Dann gilt*

(1) $(a \frown \alpha, I \setminus (\alpha+1)) \Vdash \dot{X} \cap \alpha = y(a, \alpha)$.

(2) $X(a) \cap \alpha = y(a, \alpha)$.

(3) $X(a \frown \alpha) \cap \alpha = X(a) \cap \alpha$.

(4) $(a, I \setminus (\max(a)+1)) \Vdash \dot{X} \cap \max(a)^{\oplus} = \check{X}(a) \cap \max(a)^{\oplus}$.

Beweis: (1) folgt aus dem Prikry–Lemma, da für jedes $\beta < \alpha$ die Aussage $\beta \in \dot{X}$ entschieden wird.

Zu (2): $\supseteq$ ist trivial. $\subseteq$: Aus der guten Ununterscheidbarkeit der Elemente von I folgt für alle $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ und alle $\xi < \alpha$:

$$\xi \in y(a, \alpha) \leftrightarrow \xi \in y(a, \beta).$$

Daraus folgt $\xi \in y(a, \min(I \setminus (\alpha+1)))$. Ist $\gamma < \xi$, so kann nicht $\xi \in y(a, \gamma)$ gelten, denn es ist $y(a, \gamma) \subseteq \gamma$.

Zu (3): Aus (1) folgt

$$(a \frown \alpha, I \setminus (\alpha+1)) \Vdash X(a) \cap \alpha = \dot{X} \cap \alpha.$$

Alle Bedingungen der Form $(a \frown \langle \alpha, \beta \rangle, I \setminus (\beta+1))$ sind Verstärkungen dieser Bedingung. Ferner muss jede Verstärkung von $(a \frown \alpha, I \setminus (\alpha+1))$ mit einer Bedingung dieser Form kompatibel sein. Es gilt

$$(a \frown \langle \alpha, \beta \rangle, I \setminus (\beta+1)) \Vdash X(a \frown \alpha) \cap \beta = \dot{X} \cap \beta$$

und wir sind fertig.

Zu (4): Ebenso ist jede Verstärkung von $(a, I \setminus (\max(a)+1))$ kompatibel zu einer Bedingung der Form $(a \frown \alpha, I \setminus (\alpha+1)) =: \tilde{p}_\alpha$. Nun gilt $\tilde{p}_\alpha \Vdash \dot{X} \cap \alpha = \check{X}(a) \cap \alpha$, also wird wegen $\alpha \geq \max(a)^\oplus$ der Ausdruck

$$\dot{X} \cap \max(a)^\oplus = \check{X}(a) \cap \max(a)^\oplus$$

dicht unter $(a, I \setminus (\max(a)+1))$ erzwungen. q.e.d.

Das Konstruktionsprinzip wird illustriert, indem wir zuerst versuchen, die ersten zwei Glieder der gesuchten Teilfolge von g zu bestimmen. Die Darstellung ist hier eher intuitiv im Sinne einer Lösungsfindung orientiert. Im später folgenden Beweis von Lemma 3.6.5 ist die Darstellung gerafft und auf mathematische Kürze und Vollständigkeit angelegt.

Beginn der Rekursion: Wenn ein $a \in [I]^{<\omega}$ existiert, so dass für alle $\alpha \in I$, $\alpha > \max(a)$ gilt

$$X(a) \cap \alpha = X \cap \alpha,$$

dann ist $X(a) = X$ und somit $X \in V$. Also ist X äquidefinierbar mit $\emptyset$ über V.

Ab jetzt nehmen wir $X \notin V$ an. Für alle $a \in [I]^{<\omega}$ existiert ein $\alpha \in I$, so dass $X \cap \alpha \neq X(a) \cap \alpha$.

Sei $\alpha \in I$ minimal, so dass $X \cap \alpha \neq X(\emptyset) \cap \alpha$. Wäre α ein Limes von Punkten in I, etwa $\alpha = \bigcup_{\beta \in I \cap \alpha} \beta$, dann wäre $y(\alpha) = \bigcup_{\beta \in I \cap \alpha} y(\beta)$ und es würde aus der Minimalität von α auch

$$X \cap \alpha = \bigcup_{\beta \in I \cap \alpha} (X \cap \beta) = \bigcup_{\beta \in I \cap \alpha} y(\beta) = y(\alpha) = X(\emptyset) \cap \alpha$$

folgen, was ein Widerspruch wäre. Also ist α ein Nachfolger in I.

Daher gibt es ein *größtes* Element $d_0 \in I$, so dass gilt $X \cap d_0 = X(\emptyset) \cap d_0$.
Behauptung: Es gilt $g_0 \leq d_0$. (Es ist g_0 das erste Glied der Prikry–Folge.)
Beweis: Es ist $(\langle g_0 \rangle, I \setminus (g_0+1)) \in G$ und diese Bedingung erzwingt $\dot{X} \cap g_0 = \check{y}(g_0)$. Da $y(g_0)$ Anfangsstück von $X(\emptyset)$ ist, gilt in $V[G]$ die Gleichung $\dot{X}^G \cap g_0 = X(\emptyset) \cap g_0$. Wegen der Maximalität von d_0 ist die Behauptung bewiesen.

Wir betrachten $X(\langle d_o \rangle)$ und unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1: $X(\langle d_0 \rangle) \neq X(\emptyset)$.

Das bedeutet, dass die Approximation $X(\langle d_0\rangle)$ an X besser ist als $X(\emptyset)$, die Wahl von c_0 also relevant ist.

Die Ununterscheidbarkeit der Elemente von I impliziert, dass für alle $\alpha \in I$ gilt $X(\langle\alpha\rangle) \neq X(\emptyset)$. Nun müssen sich zwei Mengen bis zu einer bestimmten Stelle $\beta \in I$ unterscheiden und wieder liefert die Ununterscheidbarkeit

$$\forall\alpha,\beta \in I,\ \beta > \alpha:\ X(\langle\alpha\rangle) \cap \beta \neq X(\emptyset) \cap \beta. \tag{$*$}$$

Andererseits gilt $(\langle g_0\rangle, I \setminus (g_0+1)) \in G$ und für alle $\alpha \in I \setminus (g_0+1)$ erfüllen die Verstärkungen dieser Bedingung $(\langle g_0, \alpha\rangle, I \setminus (\alpha+1)) \Vdash \dot{X} \cap \alpha = \check{y}(\langle g_0\rangle, \alpha) = \check{X}(\langle g_0\rangle) \cap \alpha$. Insbesondere gilt in $V[G]$:

$$\dot{X}^G \cap g_0^\oplus = X(\langle g_0\rangle) \cap g_0^\oplus.$$

Wenn nun d_0 größer als g_0 wäre, so hätten wir $\dot{X}^G \cap g_0^\oplus \subseteq \dot{X}^G \cap d_0 = X(\emptyset) \cap d_0 \supseteq X(\emptyset) \cap g_0^\oplus$, was auch $\dot{X}^G \cap g_0^\oplus = X(\emptyset) \cap g_0^\oplus$ bedeutet. Allerdings ist $X(\langle g_0\rangle) \cap g_0^\oplus \neq X(\emptyset) \cap g_0^\oplus$ als spezieller Fall von $(*)$, Widerspruch.

Wir haben also $d_0 = g_0$ bewiesen und legen $c_0 := d_0$ fest. Damit ist Fall 1 beendet und wir können versuchen, c_1 zu bestimmen.

Fall 2: $X(\langle d_0\rangle) = X(\emptyset)$.

Die Ununterscheidbarkeit liefert sofort $X(\langle\alpha\rangle) = X(\emptyset)$ für alle $\alpha \in I$ Dann spielt die Wahl von c_0 offenbar (noch) keine Rolle, da die Approximationen $X(\langle\alpha\rangle)$ nicht besser sind als das ursprüngliche $X(\emptyset)$. Wir lassen c_0 vorläufig unbestimmt und untersuchen die Approximationen $X(\langle\alpha,\beta\rangle)$ mit zwei Parametern. Wieder gibt es zwei Fälle:

Fall 2.1: $\exists\alpha,\beta \in I\ X(\langle\alpha,\beta\rangle) \neq X(\emptyset)$.

Dann folgt aus der Ununterscheidbarkeit, dass dies für alle Elemente von I gilt und die Differenz tritt bereits bis zu jeder größeren Ununterscheidbaren in I auf.

$$\forall\alpha,\beta,\gamma \in I,\ \alpha<\beta<\gamma:\ X(\langle\alpha,\beta\rangle) \cap \gamma \neq X(\langle\alpha\rangle) \cap \gamma = X(\emptyset) \cap \gamma.$$

Andererseits gilt für die ersten beiden Prikry–Punkte

$$X(\langle g_0, g_1\rangle) \cap g_1^\oplus = \dot{X}^G \cap g_1^\oplus \neq X(\emptyset) \cap g_1^\oplus. \tag{$*$}$$

Sei $d_1 \in I$ ein beliebiger Punkt, der diese Gleichung erfüllt,

$$\exists\alpha \in I \cap d_1\ X(\langle\alpha, d_1\rangle) \cap d_1^\oplus = \dot{X}^G \cap d_1^\oplus.$$

BEHAUPTUNG: Es ist $d_1 \leq g_1$.
BEWEIS: Angenommen nicht, $g_1 < d_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
X(\langle g_0, g_1\rangle) \cap g_1^{\oplus} &= \dot{X}^G \cap g_1^{\oplus} \\
&\subseteq \dot{X}^G \cap d_1 \\
&= X(\langle \alpha, d_1\rangle) \cap d_1 \text{ für ein geeignetes } \alpha \in I \cap d_1 \\
&\overset{(**)}{=} X(\langle \alpha\rangle) \cap d_1 \\
&= X(\emptyset) \cap d_1 \\
&\supseteq X(\emptyset) \cap g_1^{\oplus}.
\end{aligned}$$

Dabei gilt $(**)$, da die Bedingungen $(\langle \alpha, d_1, \gamma\rangle, I \setminus (\gamma+1))$, die die Größe von $X(\langle \alpha, d_1\rangle)$ festlegen, Verstärkungen von $(\langle \alpha, d_1\rangle, I \setminus (d_1+1))$ sind und somit $X(\langle \alpha\rangle)$ denselben Wert zuweisen. (Lemma 3.6.6(3)) Es folgt $X(\langle g_0, g_1\rangle) \cap g_1^{\oplus} = X(\emptyset) \cap g_1^{\oplus}$ im Widerspruch zu $(*)$.

Wir setzen die Definition von c fort, indem wir $c_1 \in I$ als das größte solche d_1 festlegen. Nach der Behauptung gibt es dieses größte, nämlich $c_1 = g_1$.

Wir müssen überprüfen, ob c_0 jetzt aus X bestimmt werden kann. Wieder unterscheiden wir zwei Fälle:

FALL 2.1.1: $X(\langle \alpha, g_1\rangle)$ hängt von α ab.
Dann ist wieder wegen der Ununterscheidbarkeit c_0 eindeutig bestimmt als dasjenige α (Lemma 3.2.5), so dass $X(\langle \alpha, g_1\rangle) \cap g_1^{\oplus} = \dot{X}^G \cap g_1^{\oplus}$ und wir legen $c_0 = g_0$ fest.

FALL 2.1.2: $X(\langle \alpha, g_1\rangle)$ hängt nicht von α ab.
Dann bleibt c_0 weiterhin unbestimmt. Wir gehen nach dem selben Prinzip zur Bestimmung von c_2 über.

FALL 2.2: $\forall \alpha, \beta \in I \; X(\langle \alpha, \beta\rangle) = X(\emptyset)$.
Dann bleibt auch c_1 vorläufig unbestimmt. Wir versuchen, c_2 zu bestimmen und erhalten die Fälle

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in I \; X(\langle \alpha, \beta, \gamma\rangle) \neq X(\emptyset)$$

und

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in I \; X(\langle \alpha, \beta, \gamma\rangle) = X(\emptyset),$$

in denen wir analog verfahren. Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen. Da $X \notin V$ vorausgesetzt ist, müssen wir schließlich in einem ersten Fall landen und ein c_n bestimmen.

Nun der allgemeine Rekursionsschritt.

Beweis des Hauptlemmas 3.6.5: Wir konstruieren eine Teilmenge $c \subseteq g$. Genau so, wie wir g auch als Funktion $g\colon \omega \to \kappa$ ansehen, betrachten wir c auch als partielle Funktion $c\colon \omega \hookrightarrow \kappa$.

Dazu konstruieren wir rekursiv für jedes $n < \omega$ eine partielle Funktion $B_n\colon n \hookrightarrow \kappa$ so, dass $B_{n+1} \supseteq B_n$ und $B_n \subseteq g$ für alle $n < \omega$ gilt. (Dabei heißt $B_n \subseteq g$ in unserer Schreibweise $B_n(i) = g_i$ für alle $i \in \mathrm{dom}(B_n)$.)

Die gesuchte Folge c wird sich dann als Vereinigung dieser B_n $(n < \omega)$ ergeben.

Zu Beginn setzen wir $B_0 := \emptyset$.

Sei nun $n < \omega$ und eine partielle Funktion $B_n\colon n \hookrightarrow \kappa$ mit obigen Eigenschaften bereits definiert. Um eine Fortsetzung von $B_{n+1} \supseteq B_n$ zu erhalten, setzen wir für alle $i \in \mathrm{dom}(B_n)$ auch $i \in \mathrm{dom}(B_{n+1})$ fest mit $B_{n+1}(i) := B_n(i)$.

Wir müssen entscheiden, ob $n \in \mathrm{dom}(B_{n+1})$ sein wird und, falls ja, den Wert $B_{n+1}(n)$ bestimmen. (Wir wissen bereits, dass $B_{n+1}(n)$ dann den Wert g_n haben soll. Entscheidend ist, dass wir ihn ohne Kenntnis von g, sondern nur mit Hilfe von X bestimmen werden.)

Fall 1: $\exists \alpha \in I,\ \exists a \in [I]^n,\ a \supseteq B_n,\ X(a \frown \alpha) \cap \alpha^{\oplus} \neq X(a) \cap \alpha^{\oplus}.$ $(*)$

Dann setzen wir $n \in \mathrm{dom}(B_{n+1})$ und legen $B_{n+1}(n)$ fest als

$$\gamma := \sup\{\alpha \mid \alpha \in I, \text{ so dass } \exists a \in [I]^n,\ a \supseteq B_n,\ X(a \frown \alpha) \cap \alpha^{\oplus} = \dot{X}^G \cap \alpha^{\oplus}\}.$$

Behauptung: Es gilt $\gamma = g_n$.
Beweis: Nach Lemma 3.6.6(4) erfüllt g_n die Bedingung aus der Definition von $B_{n+1}(n) = \gamma$, also gilt $\gamma \geq g_n$.

Angenommen andererseits, $\gamma = B_{n+1}(n) \neq g_n$, d.h. $\gamma > g_n$ so gehen wir analog zur bereits diskutierten Situation für $n = 1$ vor: Es existiert ein $a \in [I]^n$, $a \supseteq B_n$ mit $a \subseteq \gamma$, so dass

$$\begin{aligned} X(g \restriction (n+1)) \cap g_n^{\oplus} &= \dot{X}^G \cap g_n^{\oplus} \\ &\subseteq \dot{X}^G \cap \gamma \\ &= X(a \frown \gamma) \cap \gamma \\ &= X(a) \cap \gamma \\ &= X(g \restriction n) \cap \gamma \\ &\supseteq X(g \restriction n) \cap g_n^{\oplus} \end{aligned}$$

Dies impliziert jedoch $X(g \restriction (n+1)) \cap g_n^{\oplus} = X(g \restriction n) \cap g_n^{\oplus}$, Widerspruch zu der $(*)$ nach Lemma 3.2.4 entsprechenden Allaussage. Die Behauptung ist bewiesen.

Wir müssen prüfen, ob und welche $i < n$ neu in $\mathrm{dom}(B_{n+1})$ aufgenommen werden und für jedes i, das neu im Definitionsbereiche sein wird, den Wert $B_{n+1}(i)$ ermitteln.

Wir sehen $X(.)$ als Funktion mit Definitionsbereich $[I]^{n+1}$ an. Nach Lemma 3.2.5 gibt es eine Menge $\mathrm{supp}(X(.)) \subseteq n+1$, so dass $X(.)$ nur von den Argumentwerten mit Index in $\mathrm{supp}(X(.))$ abhängt und $X(.)$ als Funktion von $[I]^{\mathrm{supp}(X(.))}$ betrachtet injektiv ist.

Für jedes $i \in n \setminus \mathrm{dom}(B_n)$ führen wir folgende Konstruktion durch: Falls $i \in \mathrm{supp}(X(.))$ ist, dann nehmen wir i in den Definitionsbereich von B_{n+1} auf mit dem nach Lemma 3.2.5 eindeutig bestimmten Wert $\gamma_i =: B_{n+1}(i)$, so dass

$$\exists a \in [I]^n \ a \supseteq B_n,\ a(i) = \gamma_i \text{ so, dass } X(a) \cap \gamma^{\oplus} = \dot{X}^G \cap \gamma^{\oplus}.$$

Da g_i diese Gleichung erfüllt, folgt aus der Eindeutigkeit $\gamma_i = g_i$. Wenn $X(a)$ nicht von der i–ten Komponente abhängt, d.h. $i \notin \mathrm{supp}(X(.))$ (und $i \notin \mathrm{dom}(p)$), so setzen wir $i \notin \mathrm{dom}(B_{n+1})$. Damit ist Fall 1 beendet.

Fall 2: $\forall \alpha \in I,\ \forall a \in [I]^n \ a \supseteq B_n,\ X(a \frown \alpha) \cap \alpha^{\oplus} = X(a) \cap \alpha^{\oplus}$.

Dann nehmen wir n nicht in den Definitionsbereich von B_{n+1} auf, $B_{n+1}(n)$ bleibt unbestimmt. Wir definieren $B_{n+1}\colon (n+1) \hookrightarrow \kappa$ durch $B_{n+1} := B_n$. Also unterscheidet sich B_{n+1} nur formal von B_n. Damit ist Fall 2 beendet.

Wir haben also eine partielle Funktion B_{n+1} mit den verlangten Eigenschaften gefunden.

Die gesuchte Teilfolge c ergibt sich nun als Vereinigung

$$c := \bigcup_{n<\omega} B_n.$$

Dann ist $c\colon \omega \hookrightarrow \kappa$ partielle Funktion und c ist nach Konstruktion aus X definierbar. In der Konstruktion wurde gesichert, dass $c \subseteq g$ gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass umgekehrt auch X aus c definierbar ist über V. Dazu wird für jedes $n < \omega$ rekursiv eine Funktion definiert durch $c_n^*\colon n \to I$, wobei

$$c_n^*(i) = \begin{cases} c(i) & \text{falls } i \in \mathrm{dom}(c) \\ c_n^*(i-1)^{\oplus} & \text{falls } i \notin \mathrm{dom}(c). \end{cases}$$

(Im Fall $i \notin \mathrm{dom}(c)$ könnten wir statt des I–Nachfolgers jeden beliebigen Wert in I wählen, so dass c_n^* streng monoton wachsend ist.) Nun ergibt sich

$$X = \bigcup_{n<\omega} (X(c_n^*) \cap \sup(c \restriction n)).$$

q.e.d.

Dieser rekursive Beweis betont, dass für jedes $a \in [I]^{<\omega}$ bis zum I–Nachfolger $\max(a)^{\oplus}$ des Maximums von a entschieden wird, ob die Approximation $X(a)$ mit X übereinstimmt. Ebenso wird durch das Nachdefinieren deutlich, dass die Bedeutung eines Gliedes der Prikry–Folge i.A. erst an einer höheren Ordinalzahl geklärt werden kann.

Im Beweis von Lemma 3.6.5 haben wir Lemma 3.2.5 nur zum Nachdefinieren einzelner Folgenglieder benutzt. Wir geben einen zweiten Beweis von Lemma 3.6.5, der die Stärke von Lemma 3.2.5 besser ausnutzt.

Dazu systematisieren wir die Approximationen $X(.)$ an die gegebene Menge X: Wir definieren Funktionen

$$X_n \colon [I]^n \to \mathrm{Pot}(\kappa) \text{ durch } X_n(a) := X(a).$$

Dann gilt offensichtlich für jedes $n < \omega$ das Analogon zu Lemma 3.6.6(4), in dem bei n–stelligem a die Menge $X(a)$ durch $X_n(a)$ ersetzt wird.

Neuer Beweis von Lemma 3.6.5: Für jedes $n < \omega$ hat X_n nach Lemma 3.2.5 einen Träger $\mathrm{supp}(X_n) \subseteq n$. Wir bestimmen $\mathrm{supp}(X_n)$ für jedes $n < \omega$ durch

$$i \notin \mathrm{supp}(X_n) \leftrightarrow$$
$$\exists a, b \in [I]^n,\ a = \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \rangle,\ b = \langle \beta_0, \ldots, \beta_{n-1} \rangle,\ \alpha_i \neq \beta_i,\ X_n(a) = X_n(b).$$

Es folgt $\mathrm{supp}(X_m) \subseteq \mathrm{supp}(X_n)$ für alle $m \leq n$. Die Injektivität der Einschränkung $X_n \restriction^{\mathrm{supp}(X_n)} I$ impliziert mit Lemma 3.6.6

$$X_n(a) \cap \max(a)^{\oplus} = \dot{X}^G \cap \max(a)^{\oplus} \leftrightarrow \alpha_i = g_i \text{ für alle } i \in \mathrm{supp}(X_n).$$

Zur Bestimmung der gesuchten Teilfolge $c \subseteq g$ setzen wir

$$\mathrm{dom}(c) := \bigcup_{n<\omega} \mathrm{supp}(X_n).$$

Sei $n \in \mathrm{dom}(c)$, sei $m < \omega$ so, dass $n \in \mathrm{supp}(X_m)$. Dann ist c_n eindeutig bestimmt, so dass

$$\exists a \in [I]^m, a = \langle \alpha_o, \ldots, \alpha_{m-1} \rangle, c(n) = \alpha_n,\ X_m(a) \cap \max(a)^{\oplus} = \dot{X}^G \cap \max(a)^{\oplus}.$$

Da alle Anfangsstücke $g \upharpoonright n$ der Prikry–Folge diese Gleichung erfüllen, ist c Teilfolge von g. Das Rückgewinnen von X aus c erfolgt wie im ersten Beweis von Lemma 3.6.5. q.e.d.

Wir fügen die Ergebnisse zusammen in

Satz 3.6.7 *Sei $V[g]$ Prikry–Erweiterung des Grundmodells V. Sei $X \in V[g]$ eine Menge von Ordinalzahlen. Dann existiert ein $c \subseteq g$, so dass X und c über V äquidefinierbar sind.*

Beweis: Nach Lemma 3.6.3 ist X über V äquidefinierbar zu einer Teilmenge $X' \subseteq \mathrm{On}$ mit Ordnungstyp ω. Diese Menge ist nach Lemma 3.6.4 äquidefinierbar zu einem $X'' \subseteq \kappa$ (über V). Schließlich haben wir in Lemma 3.6.5 gezeigt, dass es ein $c \subseteq g$ gibt, so dass X'' und c über V äquidefinierbar sind. q.e.d.

Satz 3.6.8 *Sei $V[G]$ Prikry–Erweiterung des Grundmodells V mit induzierter Prikry–Folge $g \subseteq \kappa$. Sei $\mathcal{M} \models$ **ZFC** ein Zwischenmodell, $V \subseteq \mathcal{M} \subseteq V[G]$. Dann existiert ein $c \subseteq g$, so dass $\mathcal{M} = V[c]$.*

Beweis: Die gesamte Prikry–Erweiterung wird durch die Prikry–Folge g, d.h. durch eine Menge aufgespannt. Da in $\mathcal{M}$ das Auswahlaxiom gilt, finden finden wir eine Menge $X \in V[G]$, $X \subseteq \mathrm{On}$, so dass $\mathcal{M} = V[X]$ (vgl. [Jec78], Abschnitt 25). Sei $c \subseteq g$ so gewählt, dass c und X äquidefinierbar sind über V. Dann gilt $V[c] = V[X]$. q.e.d.

Teilmengen c_1, c_2 von g mit unendlicher symmetrischer Differenz, etwa $card(c_1 \setminus c_2) = \omega$ spannen verschiedene Zwischenmodelle auf, denn in $V[c_2]$ ist c_1 nicht definierbar.

Insbesondere liefert also der Satz eine Parametrisierung aller Zwischenmodelle zwischen V und $V[G]$. Wir erhalten eine eineindeutige Zuordnung

$$\mathrm{Pot}(\omega)/fin \longleftrightarrow \{\mathcal{M} \mid V \subseteq \mathcal{M} \subseteq V[G], \mathcal{M} \models \mathrm{ZFC}\},$$

wobei $=^*$ in $=$ und $\subseteq^*$ in $\subseteq$ überführt wird. (Dabei verwenden wir die üblichen Bezeichnungen $a =^* b$, falls $a \triangle b$ endlich ist und $a \subseteq^* b$, wenn $a \setminus b$ endlich ist.)

Kapitel 4

Gitik–Magidor–Forcing

In diesem Kapitel wird ein Forcing von Gitik und Magidor [GM92] vorgestellt, mit dessen Hilfe ein Modell von $\neg\mathbf{SCH}$ konstruiert wird. Dieses Forcing verbessert alle früheren Konstruktionen, da es das neue Modell in einem Schritt herstellt. Bis dahin war eine zweistufige Konstruktion nötig, in der für ein messbares κ zuerst $\mathrm{Pot}(\kappa)$ vergrößert und dann in einem zweiten Schritt κ singulär gemacht wurde. Gitik–Magidor–Forcing addiert simultan viele (für Modelle von $\neg\mathbf{SCH}$ mindestens κ^{++} viele) neue Prikry–Folgen. Diese Folgen sind gekoppelt durch Rudin–Keisler Projektionen, die bereits die Ultrafilter, die dem Forcing zugrunde liegen, miteinander verbinden. Dadurch entsteht ein Extender.

Wir starten die Konstruktion des Forcing mit einer elementaren Einbettung, aus der die Ultrafilter mit den nötigen Eigenschaften gewonnen werden. Indem wir den Begriff der Normalität abschwächen, können wir die Konstruktion des Extenders vereinfachen. Die Konsistenzstärke unserer Annahme liegt jedoch nicht unter der von [GM92] und bleibt bei $o(\kappa) = \kappa^{++}+1$, wobei $o(\kappa)$ die Mitchell–Ordnung von κ ist (vgl. Kapitel 5).

Gitik–Magidor–Forcing hat ähnliche Eigenschaften wie Prikry–Forcing, allerdings ist die Erweiterung in dem Sinn zu groß, dass ein Wiedergewinnen des generischen Filters aus dem System der Prikry–Folgen nicht möglich ist. Trotzdem können wir das System der Prikry–Folgen kombinatorisch charakterisieren und ein analoges Resultat zur Generizität einer Prikry–Folge beweisen.

4.1 Schwache Normalität

Zunächst stellen wir eine Verallgemeinerung normaler Ultrafilter vor.

Sei κ eine Ordinalzahl. Eine partielle Ordnung $\ll \subseteq [\kappa]^2$ heißt *Intervallordnung* auf κ, wenn folgendes gilt:

(1) $\forall \alpha, \beta < \kappa : \ \alpha \ll \beta \to \alpha < \beta$, d.h. $\ll$ ist eine Teilordnung von $<$,

(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta < \kappa : \ \alpha \ll \beta \ \wedge \ \gamma \leq \alpha \ \wedge \ \beta \leq \delta \ \to \gamma \ll \delta$,

(3) $\forall \alpha \, \beta, \gamma < \kappa : \ \alpha \ll \beta \ \wedge \ \alpha \leq \gamma \leq \beta \to \alpha \ll \gamma \ \vee \ \gamma \ll \beta$.

Beispiel: Ist $x \subseteq \kappa$, dann induziert x eine Intervallordnung auf κ vermöge $\alpha \ll \beta \leftrightarrow \exists \gamma \in x \ \alpha < \gamma \leq \beta$.

Wir verallgemeinern einige Begriffe aus Abschnitt 3.1. Sei dazu definiert $x \setminus^{\ll} y := \{\xi \in x \mid \forall \zeta \in y \ \zeta \ll \xi\}$.

Definition 4.1.1 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und $\ll$ eine Intervallordnung auf κ. Sei $n < \omega$.*

(1) *Eine Funktion $f\colon [\kappa]^n \to \kappa$ heißt $\ll$–regressiv, wenn gilt $\forall a \in [\kappa \setminus^{\ll} \{0\}]^n \ f(a) \ll \min(a)$. Eine Funktion $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ heißt $\ll$–regressiv, wenn gilt $\forall a \in [\kappa \setminus \ll \{0\}]^{<\omega} \ f(a) \ll \min(a)$.*

(2) *Ein freier Ultrafilter U auf κ heißt $\ll$–normal oder schwach normal (bzgl. $\ll$), wenn er $< \kappa$–abgeschlossen ist und für alle einstelligen $\ll$–regressiven $f\colon \kappa \to \kappa$ ein $\xi < \kappa$ existiert, so dass $f^{-1}[\{\xi\}] \in U$.*

(3) *Sei $A_\alpha \subseteq \kappa$ für $\alpha < \kappa$. Dann ist der $\ll$–Diagonalschnitt von $\{A_\alpha | \alpha < \kappa\}$ definiert als*

$$\triangle^{\ll}_{\alpha < \kappa} A_\alpha := \{\beta < \kappa | \beta \in \bigcap_{\alpha \ll \beta} A_\alpha\}.$$

Ist eine Funktion f für eine beliebige Intervallordnung $\ll$–regressiv, so ist f auch regressiv. Jeder normale Ultrafilter ist daher auch schwach normal (bzgl. jeder Intervallordnung $\ll$).

Ist in obigem Beispiel $x = \kappa$, so fallen diese Begriffe offensichtlich mit den üblichen zusammen. Mit den folgenden Lemmata wird gezeigt, dass sich die Theorie normaler Ultrafilter, die in Abschnitt 3.1 dargestellt wurde, kanonisch verallgemeinern lässt.

Lemma 4.1.2 *Sei U freier ein Ultrafilter auf κ und $\ll$ eine Intervallordnung auf κ. Dann ist U $\ll$–normal genau dann, wenn U abgeschlossen ist unter $\ll$–Diagonalschnitten.*

Beweis: $\rightarrow$: Sei U $\ll$-normal und sei $A_\alpha \in U$ für $\alpha < \kappa$. Angenommen, der Diagonalschnitt $\triangle^{\ll}_{\alpha<\kappa} A_\alpha \notin U$. Dann ist das Komplement $B := \kappa \setminus \triangle^{\ll}_{\alpha<\kappa} A_\alpha \in U$. Definiere $f\colon \kappa \to \kappa$ durch $f(\alpha) = 0$, für $\alpha \notin B$ und $f(\alpha)$ als das minimale $\beta \ll \alpha$ mit $\alpha \notin A_\beta$ für $\alpha \in B$. Dann ist f $\ll$-regressiv und somit gibt es ein für f homogenes $A \in U$. Sei $\alpha_0 < \kappa$ so der auf A konstante Wert, $f[A] = \{\alpha_0\}$. Sei nun $\alpha \in A \cap A_{\alpha_0}$, dann $f(\alpha) = \alpha_0$ (wegen $\alpha \in A$) und nach Definition von f aber $\alpha \notin A_{\alpha_0}$.Widerspruch.

$\leftarrow$: Sei $f : \kappa \to \kappa$ eine $\ll$–regressive Funktion. Wenn ein $\alpha < \kappa$ existiert mit $f^{-1}[\{\alpha\}] \in U$, so sind wir fertig. Nehmen wir an, dass für alle $\alpha < \kappa$ gilt $f^{-1}[\{\alpha\}] \notin U$. Dann sind die jeweiligen Komplemente (bzgl. κ) in U und folglich darf der $\ll$-Diagonalschnitt $D := \triangle^{\ll}_{\alpha<\kappa} \kappa \setminus f^{-1}[\{\alpha\}]$ nicht leer sein. Sei also $\xi \in D$ und sei $\alpha_0 := f(\xi) \ll \xi$. Nun gilt $\xi \notin \kappa \setminus f^{-1}[\{\alpha_0\}]$. Widerspruch. q.e.d.

Für eine Menge $A \subseteq \mathrm{On}$ und $\alpha \in \mathrm{On}$ bezeichnen wir die Menge der bezüglich $\ll$ echt aufsteigenden endlichen Folgen mit Elementen aus A mit $[A]^{<\omega}_{\ll}$. Wir verallgemeinern den Satz von Rowbottom (Lemma 3.1.3).

Lemma 4.1.3 *Sei κ Kardinalzahl und $\ll$ eine Intervallordnung auf κ. Sei U ein $\ll$–normaler Ultrafilter auf κ und $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ eine $\ll$–regressive Funktion. Dann gibt es eine für f $\ll$–homogene Menge $I \in U$, d.h. es ist $f \restriction [I]^{<\omega}_{\ll}$ konstant.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass der Satz für jedes $n < \omega$ und jede $\ll$–regressive Funktion $g\colon [\kappa]^n \to \kappa$ gilt. Denn seien Mengen $I_n \in U$ homogen für (die $\ll$–regressiven Einschränkungen) $f \restriction [\kappa]^n$, so ist $I := \bigcap_{n<\omega} H_n \in U$ als abzählbarer Schnitt von Elementen von U und offensichtlich ist I homogen für f.

Wir zeigen die Behauptung für jedes $n < \omega$ durch Induktion. Im Fall $n = 1$ ist nach Definition von $\ll$–normal nichts zu zeigen. Gelte die Aussage des Satzes also für n und sei $g\colon [\kappa]^{n+1} \to \kappa$ eine $\ll$–regressive Funktion. Für $a \in [\kappa]^n_{\ll}$ sei $g_a\colon \kappa \to \kappa$ gegeben durch

$$g_a(\alpha) = \begin{cases} g(a \frown \alpha), \text{ falls } \max(a \ll \alpha), \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $a \in [\kappa]^n_\ll$ ist g_a $\ll$–regressiv, sei also $H_a \in U$ homogen für g_a mit $g''[H_a]^n_\ll = \{\beta_a\}$.

Wir definieren $h\colon [\kappa]^n_\ll \to \kappa$ durch $h(a) := \beta_a$. Dann ist h $\ll$–regressiv und nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine $\ll$–homogene Menge $H \in U$, sei β der auf $[H]^n_\ll$ konstante Wert von h. Aufgrund der $< \kappa$–Abgeschlossenheit von U gilt $H_\alpha := \bigcap_{\max(a) \leq \alpha} H_a \in U$. Wir setzen

$$I := H \cap \triangle^{\ll}_{\alpha<\kappa} H_\alpha.$$

Dann ist $I \in U$ und wir zeigen, dass die Einschränkung $g \restriction [I]^{n+1}$ konstant ist: Sei $a \frown \alpha \in [I]^{n+1}_\ll$, dann gilt $g(a \frown \alpha) = g_a(\alpha) = \beta_a = \beta$, denn $\alpha \in H_{\max(a)} \subseteq H_a$ und $a \in [H]^n$. q.e.d.

Um Lemma 3.1.4 zu verallgemeinern, schreiben wir für eine Intervallordnung $\ll$ auf κ und $\xi < \kappa$: $\xi^* := \min\{\zeta < \kappa \mid \neg \xi \ll \zeta\}$.

Lemma 4.1.4 *Sei $\kappa \in Card$ und $\ll$ eine Intervallordnung auf κ. Sei U ein $\ll$–normaler Ultrafilter auf κ. Sei für jedes $\xi < \kappa$ eine Menge $P_\xi \subseteq \xi^*$ gegeben. Dann existiert ein $x \subseteq \kappa$, so dass*

$$\{\xi < \kappa \mid x \cap \xi^* = P_\xi\} \in U.$$

Beweis: O.B.d.A. ist die leere Menge in keiner der Mengen P_ξ enthalten. Wir definieren $f\colon [\kappa]^2 \to \kappa$ durch

$$f(\beta,\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{falls } P_\alpha \cap \beta^* = P_\beta \\ \xi & \text{falls } \xi = \min((P_\alpha \cap \beta^*) \triangle P_\beta. \end{cases}$$

Dann ist f $\ll$–regressiv. Sei $H \in U$ homogen für f, d.h. $f \restriction [H]^2 = \{\xi\}$ für ein geeignetes $\xi < \kappa$.

Behauptung: $\xi = 0$.

Beweis: Angenommen nicht, $\xi \neq 0$. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in H$ gewählt, so dass $\xi < \gamma < \beta < \alpha$ ist. Dann gilt

$$\xi = \min((P_\alpha \cap \gamma^*) \triangle P_\gamma) = \min((P_\alpha \cap \beta^*) \triangle P_\beta) = \min((P_\beta \cap \gamma^*) \triangle P_\gamma).$$

Falls nun $\xi \in P_\alpha \setminus P_\beta$ ist, dann $\xi \in P_\alpha \setminus P_\gamma$, also $\xi \notin P_\beta \cup P_\gamma \supseteq P_\beta \triangle P_\gamma$. Widerspruch. Falls umgekehrt $\xi \in P_\beta \setminus P_\alpha$ ist, so folgt $\xi \in P_\gamma \setminus P_\alpha$, also $\xi \in P_\beta \cap P_\gamma$ und $\xi \notin P_\beta \triangle P_\gamma$. Widerspruch.

Wir definieren

$$x := \bigcup_{\alpha \in H} P_\alpha$$

und behaupten, dass x das Verlangte leistet: Seien $\alpha, \beta \in H$, $\beta < \alpha$. Dann gilt $P_\beta \subseteq P_\alpha \subseteq x$. Da α beliebig in $H \setminus (\beta + 1)$ war, folgt $x \cap \beta^* = P_\beta$. Da $\beta \in H$ beliebig war, gilt $\{\beta < \kappa \mid x \cap \beta^* = P_\beta\} \supseteq H \in U$. q.e.d.

Satz 4.1.5 *Sei $\ll$ eine Intervallordnung auf κ, sei U ein $\ll$–normaler Ultrafilter auf κ und $\mathcal{M}$ eine Struktur in einer abzählbaren Sprache, so dass $\kappa \subseteq \mathcal{M}$. Dann existiert eine Menge $I \in U$ von $\ll$–Ununterscheidbaren für $\mathcal{M}$, d.h. für jede Formel $\varphi(\vec{v})$ in der Sprache von $\mathcal{M}$ mit n freien Variablen $\vec{v} = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ und für alle n-Tupel $\vec{a}, \vec{b} \in [I]^n$ mit $a_1 \ll \ldots \ll a_n$ und $b_1 \ll \ldots \ll b_n$ gilt*

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{M} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]$$

Beweis: Sei $\{\varphi_i | i < \omega\}$ Aufzählung aller Formeln der Sprache von $\mathcal{M}$, wobei in φ_i höchstens die Variablen $v_1, \ldots, v_{n(i)}$ frei seien und $n(i) \leq i$. Betrachte nun die Wahrheitswertefunktion $f \colon [\kappa]^{<\omega} \to 2 \subseteq \kappa$ gegeben durch $f(a_1, \ldots, a_i) = 1$, wenn $\mathcal{M} \models \varphi_i(a_1, \ldots, v_{n(i)})$ und 0, wenn nicht. Dann ist f o.B.d.A. $\ll$–regressiv (sonst ändere f auf höchstens abzählbar vielen Stellen mit $\min(\vec{a}) \leq 1$ ab). Nach Lemma 4.1.3 gibt es nun eine homogene Menge $I \in U$, d.h. $f \restriction [I]^{<\omega}_{\ll}$ ist konstant. Damit ist I Menge von $\ll$–Ununterscheidbaren für $\mathcal{M}$. q.e.d.

Auch für $\ll$–Ununterscheidbare liefern die Beweise von 4.1.3 und 4.1.5 analog zu den Überlegungen nach Satz 3.2.3 die Existenz einer Menge *guter* $\ll$–Ununterscheidbarer, d.h. solcher, die ununterscheidbar bleiben bei Hinzunahme von Parametern $\alpha \ll \min(a)$. Wir gehen im folgenden von Mengen guter $\ll$–Ununterscheidbarer aus.

Prikry–Forcing ließe sich mit entsprechenden Resultaten wie in Abschnitt 3.4 auch ausgehend von schwach normalen Ultrafiltern darstellen. Dazu müssten wir in der Definition von $\mathcal{P}_P$ verlangen, dass die Approximationen an die Prikry–Folge $\ll$–aufsteigend und die Reservoirmengen in einem (bzgl. $\ll$) schwach normalen Ultrafilter sind. Wir verallgemeinern den Begriff Prikry–Bedingung in natürlicher Weise auf solche Paare.

4.2 Eine elementare Einbettung und ein System von Ultrafiltern

Prikry–Forcing basierte auf einem Ultrafilter, der aus einer elementaren Einbettung des Universums gewonnen wurde. Wir stellen nun zusätzliche Absolutheitsanforderungen an eine solche Einbettung π, um einen Extender zu erhalten.

Sei das Grundmodell V Modell von **GCH**. Sei für den Rest dieses Kapitels

$$\pi\colon V \to M$$

eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt $crit(\pi) = \kappa$ in ein transitives Modell M von ZFC mit ${}^{\kappa}M \subseteq M$, so dass $(\kappa^{++})^M = (\kappa^{++})^V$.

Sei $c \subseteq \kappa$ unbeschränkt in κ und $\ll$ die von c induzierte Intervallordnung sowie $\sim_c$ die erzeugte Äquivalenzrelation: Es ist $\alpha \sim_c \beta$ genau dann, wenn weder $\alpha \ll \beta$ noch $\beta \ll \alpha$, d.h. wenn $c \cap (\alpha, \beta] = \emptyset$.

Wir nehmen an, dass c hinreichend große Lücken enthält und wählen λ aus dem halboffenen Intervall $[\kappa,\ \pi(\kappa))$, so dass λ in M eine Kardinalzahl mit Konfinalität größer als κ ist und für alle $\alpha \in [\kappa,\ \lambda)$ gilt $\alpha\, \pi(\sim_c)\, \kappa$, d.h. $\pi(c) \cap (\kappa, \lambda) = \emptyset$. Dies ist etwa für $c := \{\xi < \kappa \,|\, \xi \text{ Limeskardinalzahl}\}$ möglich.

Wir definieren nun zu jedem $\alpha \in [\kappa,\ \lambda)$ einen Ultrafilter

$$U_\alpha := \{x \subseteq \kappa | \alpha \in \pi(x)\}.$$

Lemma 4.2.1 *Für alle $\alpha \in [\kappa,\ \lambda)$ ist U_α ein $\ll$–normaler Ultrafilter.*

Beweis: Dass U_α ein $< \kappa$–vollständiger Ultrafilter ist, lässt sich genauso wie in Lemma 3.3.1 zeigen. Um $\ll$–Normalität zu zeigen, zeigen wir, dass Definition 4.1.1 (2) für $\xi = \pi(f)(\alpha)$ erfüllt ist. Sei $f\colon \kappa \to \kappa$ $\ll$–regressiv. Dann ist $\pi(f)\colon \pi(\kappa) \to \pi(\kappa)$ in M $\pi(\ll)$–regressiv, d.h. wir haben $\pi(f)(\alpha)$ $\pi(\ll)\ \alpha\ \pi(\sim_c)\ \kappa$ und somit $\pi(f)(\alpha) < \kappa$. Also gilt $\alpha \in (\pi(f))^{-1\prime\prime}\{\pi(f)\,(\alpha)\} = \pi(f^{-1\prime\prime}\{\pi(f)\,(\alpha)\})$. Es folgt $f^{-1}[\{\pi(f)(\alpha)\}] \in U_\alpha$. q.e.d.

Die Ultrafilter U_α sind miteinander gekoppelt. Um diese Kopplung beschreiben und ausnutzen zu können, führen wir auf dem Intervall $[\kappa,\ \lambda)$ eine partielle Ordnung ein.

Definition 4.2.2 *Seien $\alpha, \beta \in [\kappa,\ \lambda)$. Wir definieren die Relation $\alpha \lhd \beta$ genau dann, wenn $\alpha \leq \beta$ und eine Funktion $\sigma\colon \kappa \to \kappa$ existiert, so dass $\alpha = \pi(\sigma)(\beta)$.*

Bemerkung: Seien $\alpha, \beta \in [\kappa, \lambda)$, $\alpha \lhd \beta$ und sei $\sigma\colon \kappa \to \kappa$ eine Funktion, so dass $\alpha = \pi(\sigma)(\beta)$. Dann existiert eine Funktion $\bar{\sigma}\colon \kappa \to \kappa$ mit $\forall \xi < \kappa\ \bar{\sigma}(\xi) \leq \xi \wedge \bar{\sigma}(\xi) \sim_c \xi$, so dass $\alpha = \pi(\bar{\sigma})(\beta)$,

Beweis: Sei $\alpha \lhd \beta$ vermöge $\sigma\colon \kappa \to \kappa$. Definiere eine Funktion $\bar{\sigma}\colon \kappa \to \kappa$ wie folgt. Setze $\bar{\sigma}(\xi) := \sigma(\xi)$, falls $\sigma(\xi) \leq \xi$ und $\sigma(\xi) \sim_c \xi$ und sonst $\bar{\sigma}(\xi) := \xi$. Es gilt $\pi(\sigma)(\beta) = \alpha \leq \beta$ und $\pi(\sigma)(\beta) = \alpha\, \pi(\sim_c)\, \kappa\, \pi(\sim_c)\, \beta$, also $\pi(\sigma)(\beta)\, \pi(\sim_c)\, \beta$ und somit $\pi(\bar{\sigma})(\beta) = \pi(\sigma)(\beta) = \alpha$. q.e.d.

Wenn $\sigma : \kappa \to \kappa$ eine Projektion mit $\alpha = \pi(\sigma)(\beta)$ ist, so sagen wir σ *bezeugt* $\alpha \lhd \beta$.[1] Wir nehmen nach der Bemerkung o.B.d.A. an, dass jedes σ, das $\alpha \lhd \beta$ bezeugt, die Relation $\sim_c$ respektiert und kontrahierend ist.

Satz 4.2.3 *Für die Folge $\langle U_\alpha \mid \alpha \in [\kappa, \lambda) \rangle$ der Ultrafilter gilt*

(1) *Wenn $\alpha \lhd \beta$, etwa bezeugt durch $\sigma\colon \kappa \to \kappa$, dann gilt*

$$\forall x \subseteq \kappa\ x \in U_\alpha \leftrightarrow \sigma^{-1}[x] \in U_\beta. \tag{$*$}$$

(2) *Wenn $\alpha \lhd \beta$ und $\beta \lhd \gamma$, bezeugt durch σ_α bzw. σ_β, dann gilt $\alpha \lhd \gamma$ und*

$$\{\xi < \kappa \mid \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta(\xi) = \sigma(\xi)\} \in U_\gamma$$

für jede Projektion $\sigma\colon \kappa \to \kappa$ mit $\alpha = \pi(\sigma)(\gamma)$.

(3) *Wenn α und β verschieden sind mit $\alpha, \beta \lhd \gamma$, bezeugt durch σ_α bzw. σ_β dann gilt*

$$\{\xi < \kappa \mid \sigma_\alpha(\xi) \neq \sigma_\beta(\xi)\} \in U_\gamma.$$

Beweis: Zu (1): Sei $\alpha \lhd \beta$ vermöge σ und $x \subseteq \kappa$. Dann gilt $x \in U_\alpha \leftrightarrow \alpha \in \pi(x) \leftrightarrow \pi(\sigma)(\beta) \in \pi(x) \leftrightarrow \beta \in \{\xi < \pi(\kappa) \mid \pi(\sigma)(\xi) \in \pi(x)\} \leftrightarrow \beta \in \pi(\{\xi < \kappa \mid \sigma(\xi) \in x\}) \leftrightarrow \beta \in \pi(\sigma^{-1}[x]) \leftrightarrow \sigma^{-1}[x] \in U_\beta$.

Zu (2): Gelte $\alpha \lhd \beta$ mit Zeuge σ_α und $\beta \lhd \gamma$ mit Zeuge σ_β. Dann gilt $\alpha = \pi(\sigma_\alpha)(\beta) = \pi(\sigma_\alpha)(\pi(\sigma_\beta)(\gamma)) = \pi(\sigma_a) \circ \pi(\sigma_\beta)(\gamma) = \pi(\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta)(\gamma)$. Es folgt $\alpha \lhd \gamma$. Sei nun $\sigma\colon \kappa \to \kappa$ beliebig mit $\alpha = \pi(\sigma)(\gamma)$. Dann gilt $\gamma \in \{\xi < \pi(\kappa) \mid \pi(\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta)(\xi) = \pi(\sigma)(\xi)\} = \pi(\{\xi < \kappa \mid \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta(\xi) = \sigma(\xi)\})$ und nach Definition von U_γ folgt (2).

Zu (3): Gelte $a \neq \beta$ und $\alpha, \beta \lhd \gamma$ vermöge σ_α und σ_β. Dann gilt $\pi(\sigma_\alpha)(\gamma) = \alpha \neq \beta = \pi(\sigma_\beta)(\gamma)$. Daraus folgt $\gamma \in \{\xi < \pi(\kappa) \mid \pi(\sigma_\alpha)(\xi) \neq \pi(\sigma_\beta)(\xi)\} = \pi(\{\xi < \kappa \mid \sigma_\alpha(\xi) \neq \sigma_\beta(\xi)\})$ und nach Definition von U_γ gilt (3). q.e.d.

[1] Die in dieser Form unübliche Verwendung des Begriffs Projektion ist gerechtfertigt durch die Rolle dieser Funktionen für Gitik–Magidor–Forcing, vgl. Abschnitt 4.3.

Definition 4.2.4 *Eine Projektion σ mit der Eigenschaft* (1) *heißt* Rudin-Keisler-Projektion *von U_β auf U_α. Man nennt ein System von Ultrafiltern $\langle U_\alpha \mid \alpha \in [\kappa, \lambda)\rangle$ mit einer Relation $\lhd$, dass* (1) – (3) *aus Satz 4.2.3 erfüllt, ein* Rudin-Keisler-System *von Ultrafiltern auf κ oder einen* Extender *an κ. Es heißt $card([\kappa,\ \lambda)) = card(\lambda)$ die* Länge *dieses Extenders.*

Lemma 4.2.5 *Die Relation $\lhd$ ist eine κ-gerichtete partielle Ordnung auf $[\kappa, \lambda)$, d.h. für alle $X \subseteq [\kappa, \lambda)$ gilt* $\mathrm{card}(X) \leq \kappa \longrightarrow \exists \beta \in [\kappa, \lambda) \forall \alpha \in X\, \alpha \lhd \beta$.

Für den Beweis führen wir folgenden Begriff ein: Ist μ ein Kardinalzahl und $f\colon \mu \to X$ eine Funktion, dann nennen wir f *supersurjektiv* genau dann, wenn

$$\forall x \in X\, \forall \xi < \mu\, \exists \zeta < \mu\ (\xi < \zeta\ \wedge\ f(\zeta) = x)$$

erfüllt ist.

Beweis: Die Transitivität wurde in 4.2.3(b) gezeigt. Die Reflexivität folgt, weil die identische Abbildung definierbar ist und durch π nicht verändert wird. Durch den ersten Teil der Definition von $\lhd$ werden Zykel ausgeschlossen.

Zur κ-Gerichtetheit: Sei $X = \{\alpha_i \mid i < \kappa\} \subseteq [\kappa,\ \lambda)$, dann ist $X \in M$ wegen der κ-Abgeschlossenheit von M. Ferner gilt wegen $M \models \mathrm{cof}(\lambda) > \kappa$ auch $M \models X \in H_\lambda$. Sei nun $h\colon \kappa \to H_\kappa$ in V eine Funktion, so dass für alle Kardinalzahlen $\mu < \kappa$ die Einschränkung $f \restriction \mu$ zum einen in H_μ abbildet und zum anderen auf H_μ supersurjektiv ist. Dann gilt

$$M \models \forall \mu < \pi(\kappa)\ f \restriction \mu \text{ ist supersurjektiv auf } H_\mu.$$

Sei nun $\alpha < \lambda$ so groß gewählt, dass $\sup(X) < \alpha$ und $X = \pi(h)(\alpha)$. Definiere nun Projektionen $\sigma_i\colon \kappa \to \kappa$ durch $\sigma_i(\xi) = h(\xi)(i)$, falls $h(\xi)(i)$ definiert ist und sonst 0. Dann gilt $\pi(\sigma_i)(\alpha) = (\pi(h)(\alpha))(i) = \alpha_i$ und so $\alpha_i \lhd \alpha$. q.e.d.

4.3 Die Gitik–Magidor–Halbordnung

Wir definieren die und untersuchen wichtige Grund legende Eigenschaften der Gitik–Magidor–Halbordnung.

Sei ein κ–gerichtetes Rudin–Keisler–System $\langle (U_\alpha \mid \alpha \in [\kappa,\ \lambda)), \lhd\rangle$ von $< \kappa$–vollständigen schwach normalen Ultrafiltern wie im vorangegangenen Abschnitt gegeben.

Sei für jedes Paar $\alpha, \beta < \lambda$ mit $\alpha \lhd \beta$ eine Projektion

$$\sigma_{\beta\alpha} \colon \kappa \to \kappa$$

fixiert, die $\alpha \lhd \beta$ bezeugt. Für jedes $\alpha < \lambda$ können wir annehmen, dass $\sigma_{\alpha\alpha} = \mathrm{id} \restriction \kappa$ ist. Wir fixieren nun für jedes Tripel α, β, γ mit $\alpha \lhd \beta \lhd \gamma$ die *Kommutativitätsmengen* bezüglich dieser Projektionen:

$$K^{\gamma}_{\beta\alpha} := \{\xi < \kappa \mid \sigma_{\beta\alpha} \circ \sigma_{\gamma\beta}(\xi) = \sigma_{\gamma\alpha}(\xi)\} \in U_\gamma.$$

Wie schreiben $\lesssim$ für $\ll$ oder $\sim_c$.

Definition 4.3.1 *Die Gitik–Magidor–Bedingungsmenge $\mathcal{P}_{GM}$ wird definiert wie folgt: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$ genau dann, wenn $\tilde{p}$ ein Paar (p, P) ist, das folgende Bedingungen erfüllt:*

(1) *p ist eine partielle Funktion $p \colon [\kappa, \lambda) \hookrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\ll}$ mit card$(p) \leq \kappa$,*

(2) *es gibt eine maximale Koordinate $\mu_p \in \mathrm{dom}(p)$, d.h. $\forall \nu \in \mathrm{dom}(p)\ \nu \lhd \mu_p$,*

(3) *für alle $\nu \in \mathrm{dom}(p)$ gilt $\max(p(\mu_p)) \lesssim \max(p(\nu))$,*

(4) *es ist $P \in U_{\mu_p}$, wobei $\max p(\mu_p) \ll \min(P)$,*

(5) *für alle $\xi < \kappa$ gilt card$(\{\nu \in \mathrm{dom}(p) \mid \max p(\nu) < \xi\}) < \kappa$.*

Aus technischen Gründen sehen wir das Paar $(\emptyset, \kappa)$ auch als Bedingung an.

Für $\nu \in \mathrm{dom}(p)$ ist $p(\nu)$ Anfangsstück einer in κ konfinalen Folge mit Ordnungstyp ω. Das Wachsen dieser Anfangsstücke soll von der maximalen Koordinate μ_p aus gesteuert werden. Um dies zu ermöglichen, wird (2) verlangt. Andererseits kann nach (3) mit Hilfe der Funktionen $\sigma_{\mu_p\nu}$ keine neue Information aus $p(\mu_p)$ auf die $\lhd$–kleineren Stellen in $\mathrm{dom}(p)$ projiziert werden. Die Punkte für mögliche Verlängerungen von $p(\mu_p)$ müssen wie bei Prikry–Forcing aus einer im Sinne des Ultrafilters U_{μ_p} großen Menge stammen. Bedingung (5) ermöglicht in der Konstruktion die Verwendung von Diagonalschnitten.

Das Paar $(p(\mu_p), P)$ ist eine Prikry–Bedingung zum Ultrafilter U_{μ_p} im Sinn unserer Verallgemeinerung.

Bevor wir eine Ordnung auf $\mathcal{P}_{GM}$ definieren, werden erst noch hilfreiche Schreibweisen vereinbart.

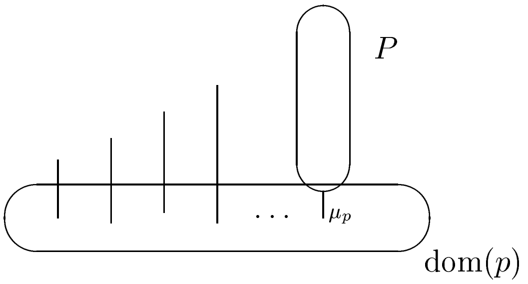

Abbildung 4.1: Eine Gitik–Magidor–Bedingung $\tilde{p}$

Für alle $a, b \in [\kappa]^{<\omega}_{\ll}$ wird $a \oplus b$ definiert durch

$$a \oplus b := a \frown \langle \xi \in b \mid \xi \gg \max(a) \rangle.$$

Ist $\tilde{p}$ eine Gitik-Magidor-Bedingung, μ eine $\lhd$-obere Schranke von $\mathrm{dom}(p)$ und $a \in [\kappa]^{<\omega}_{\ll}$, so definieren wir

$$p \otimes_\mu a : \mathrm{dom}(p) \to [\kappa]^{<\omega}_{\ll},\ \nu \mapsto p(\nu) \oplus \sigma_{\mu\nu}[a].$$

Definition 4.3.2 *Auf $\mathcal{P}_{GM}$ werden zunächst zwei partielle Ordnungen definiert. Seien $\tilde{p} = (p, P)$ und $\tilde{q} = (q, Q)$ Gitik–Magidor–Bedingungen. Definiere $\tilde{q} \leq_r \tilde{p}$ (q ist Reflektionserweiterung von p) genau dann, wenn*

(1) $\mathrm{dom}(q) = \mathrm{dom}(p)$ *und* $\forall \nu \in \mathrm{dom}(p)\ q(\nu) = p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p\nu}(q(\mu_p))$

(2) $q(\mu_p) \setminus p(\mu_p) \subseteq P$,

(3) $Q = P \setminus^{\ll} q(\mu_p)$.

Bedingung (1) läßt sich kurz schreiben durch $q = p \otimes_{\mu_p} q(\mu_p)$. Die Definitionsbereiche ändern sich also nicht und alle endlichen Folgen $p(\nu)$ werden enderweitert gemäß der Verlängerung an der maximalen Koordinate. Die Ultrafiltermenge wird nur so weit verändert, wie durch Bedingung (4) aus der Definition von $\mathcal{P}_{GM}$ gefordert wird. Eine Reflektionserweiterung $\tilde{q} \leq_r \tilde{p}$ ist eindeutig bestimmt durch die Verlängerung $q(\mu_p) \setminus p(\mu_p)$, wir erweitern unsere Schreibweise von $\otimes$ wie folgt: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$ und $a \in [\kappa]^{<\omega}_{\ll}$, so dass

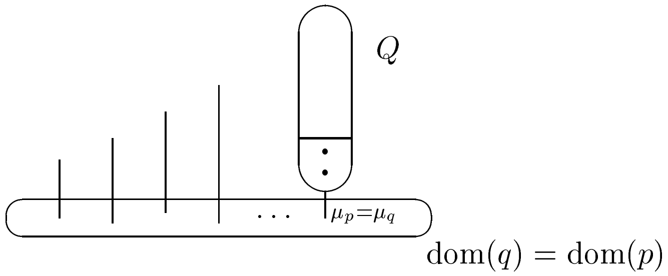

Abbildung 4.2: Eine Reflektionserweiterung $\tilde{q}$

$a \subseteq P$. Dann definieren wir $\tilde{p} \otimes_\mu a := (q, Q)$, wobei $q = p \otimes_\mu a$ und $Q = P \cap \{\xi < \kappa \mid \max(a) \ll \xi\}$.

Definiere $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ *(direkte Erweiterung) genau dann, wenn*

(1) $p \subseteq q$, *d.h.* $\mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(q)$ *und* $\forall \nu \in \mathrm{dom}(p)\ q(\nu) = p(\nu)$,

(2) $Q \subseteq \sigma^{-1}_{\mu_p \mu_q}[P]$,

(3) $Q \subseteq \triangle^{\ll}_{\xi<\kappa} \bigcap_{\max\ q(\nu) \ll \xi} K^{\mu_q}_{\mu_p \nu}$.

Bedingung (3) ist gleichbedeutend mit

$$\forall \nu \in \mathrm{dom}(p)\ \forall \xi \in Q\ (\max(p(\nu)) \ll \xi \longrightarrow \sigma_{\mu_q \nu}(\xi) = \sigma_{\mu_p \nu} \circ \sigma_{\mu_q \mu_p}(\xi)).$$

Die direkte Erweiterung $\tilde{q}$ legt neue Anfangsstücke von Prikry-Folgen fest, dabei gibt es Einschränkungen weder bzgl. der Koordinaten, die neu im Definitionsbereich von q auftreten noch bzgl. der neuen Anfangsstücke selbst. Auf den alten Koordinaten stimmt q mit p überein. Das Reservoir für mögliche Verlängerungen (durch Reflektionserweiterungen) wird (modulo der Projektion zwischen den maximalen Koordinaten) verkleinert. Die Kommutativität in (3) sichert, dass zu jeder Reflektionserweiterung von $\tilde{q}$ durch Punkte aus Q eine von $\tilde{p}$ durch Punkte aus P existiert. Bedingungen (2) und (3) lassen sich zu einer zusammenfassen.

Nun wird auf $\mathcal{P}_{GM}$ *die Gitik–Magidor–Halbordnung* $\leq$ *definiert durch* $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ *genau dann, wenn es endlich viele Bedingungen* $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n \in \mathcal{P}_{GM}$ *gibt,*

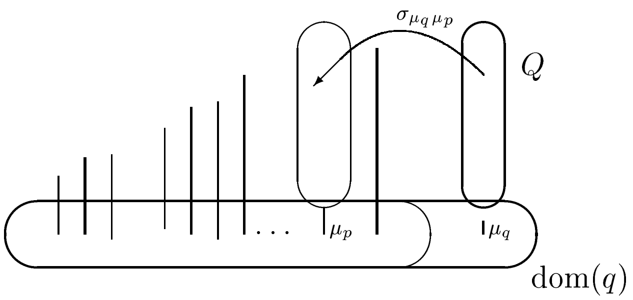

Abbildung 4.3: Eine direkte Gitik–Magidor–Erweiterung $\tilde{q}$

so dass $\tilde{q} = \tilde{p}_1, \tilde{p} = \tilde{p}_n$ und für alle $i < n$ die Bedingung $\tilde{p}_i$ direkte oder Reflektionserweiterung von $\tilde{p}_{i+1}$ ist.

Lemma 4.3.3 (1) *$\leq_r$ ist partielle Ordnung.*

(2) *$\leq_d$ ist partielle Ordnung.*

(3) *$\leq$ ist partielle Ordnung.*

Beweis: Zu (1): Sei $\tilde{r} \leq_r \tilde{q} \leq_r \tilde{p}$. Dann ist $\mathrm{dom}(r) = \mathrm{dom}(q) = \mathrm{dom}(p)$ mit derselben maximalen Koordinate μ. Es gilt $r(\mu) \setminus p(\mu) = (r(\mu) \setminus q(\mu)) \cup (q(\mu) \setminus p(\mu)) \subseteq Q \cup P = P$. Weiter $R = \{\xi \in Q \mid \xi \geq \max(r(\mu))\} = \{\xi \in P \mid \xi \geq \max(r(\mu))\}$ und für $\nu \in \mathrm{dom}(p)$ gilt:

$$r(\nu) = q(\nu) \oplus r(\mu) = (p(\nu) \oplus q(\mu)) \oplus r(\mu) = p(\nu) \oplus r(\mu).$$

Zu (2): Sei $\tilde{r} \leq_d \tilde{q} \leq_d \tilde{p}$. Dann gilt $r \supset q \supset p$ und Bedingung (1) ist klar. Ferner ist $R \subseteq \sigma^{-1}_{\mu_r\mu_q}[Q] \subseteq \sigma^{-1}_{\mu_r\mu_q}[\sigma^{-1}_{\mu_q\mu_p}[P]]$. Wegen $\max(q(\mu)) \ll \min(P)$ und Bedingung (3) für $\tilde{r} \leq_d \tilde{q}$ folgt $R \subseteq \sigma^{-1}_{\mu_r\mu_p}[P]$. Sei nun $\xi \in R$ und $\nu \in \mathrm{dom}(p)$, dann ist $\nu \in \mathrm{dom}(q)$ und wieder nach (3) für $\tilde{r} \leq_d \tilde{q}$ gilt $\sigma_{\mu_r\nu}(\xi) = \sigma_{\mu_q\nu} \circ \sigma_{\mu_r\mu_q}(\xi)$. Es ist $\sigma_{\mu_r\mu_q}(\xi) \in Q$, also gilt $\sigma_{\mu_r\nu}(\xi) = \sigma_{\mu_p\nu} \circ \sigma_{\mu_q\mu_p} \circ_{\mu_r\mu_q} (\xi)$ und wegen $\mu_p \in \mathrm{dom}(q)$: $\sigma_{\mu_r\nu}(\xi) = \sigma_{\mu_p\nu} \circ \sigma_{\mu_r\mu_p}(\xi)$.

(3) folgt unmittelbar aus der Definition als endliche Verkettung von $\leq_d$ und $\leq_r$. q.e.d.

Für eine partielle Ordnung verlangen wir nur Transitivität und Reflexivität. Zusätzlich hat $(\mathcal{P}_{GM}, \leq)$ ein größtes Element, nämlich $(\emptyset, \kappa)$.

Das folgende Lemma zeigt, dass wir jede beliebige Verstärkung einer Bedingung $\tilde{p}$ schon in zwei Schritten erreichen können. Die entsprechende Aussage für Prikry–Forcing war trivial und auch hier kennen wir die Bedingung $\tilde{r}$ mit $\tilde{q} \leq_d \tilde{r} \leq_r \tilde{p}$.

Lemma 4.3.4 (2–Schritt–Lemma) *Sei $\tilde{q} \leq \tilde{p}$. Dann gilt*

$$\tilde{q} \leq_d \tilde{p} \otimes_{\mu_p} (q(\mu_p) \setminus p(\mu_p)) \leq_r \tilde{p}. \tag{$*$}$$

Beweis: In der Folge von Bedingungen, die $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ bezeugt, können unmittelbar aufeinander folgende gleichartige Erweiterungen zu jeweils einer zusammengefasst werden. Es reicht also, den Fall $\tilde{q} \leq_r \tilde{r} \leq_d \tilde{p}$ zu betrachten, und $(*)$ zu zeigen.

Dabei ist die rechte Ungleichung klar. Für die linke Ungleichung zeige (1)–(3) aus der Definition von $\leq_d$. Sei $\nu \in \operatorname{dom}(p) \subseteq \operatorname{dom}(q)$. Dann ist

$$\begin{aligned} q(\nu) &= r(\nu) \oplus \sigma_{\mu_r \nu}[q(\mu_r)] &&= p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_r \nu}[q(\mu_r)] \\ &= p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p \nu} \circ \sigma_{\mu_r \mu_p}[q(\mu_r)] &&= p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p \nu}[q(\mu_p)] \end{aligned}$$

wegen der Kommutativität (3) aus der Definition von $\leq_d$. Klar ist $Q \subseteq R \subseteq \sigma^{-1}_{\mu_r \mu_p}[P] \subseteq \sigma^{-1}_{\mu_q \mu_p}[P]$. Für Bedingung (3) sei $\nu \in \operatorname{dom}(p \otimes_{\mu_p} q(\mu_p)) = \operatorname{dom}(p)$ und sei $\xi \in Q \subseteq R$, $\xi \gg \max(q(\mu_p))$. Wegen $\tilde{r} \leq_d \tilde{p}$ gilt nun $\sigma_{\mu_r \nu}(\xi) = \sigma_{\mu_p \nu} \circ \sigma_{\mu_r \mu_p}(\xi)$ und wegen $\tilde{q} \leq_d \tilde{r}$ können wir in dieser Gleichung μ_r durch μ_q ersetzen und erhalten $\sigma_{\mu_q \nu}(\xi) = \sigma_{\mu_p \nu} \circ \sigma_{\mu_q \mu_p}(\xi)$, was zu zeigen war. q.e.d.

Lemma 4.3.5 *Sei $\tilde{p} = (p, P)$ Bedingung und $\nu \in [\kappa, \lambda)$. Dann existiert eine direkte Erweiterung $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ mit $\nu \in \operatorname{dom}(q)$.*

Beweis: Fall 1: $\nu \in \operatorname{dom}(p)$. Dann ist nichts zu tun.

Fall 2: $\nu \notin \operatorname{dom}(p)$ und $\nu \lhd \mu_p$. Dann setzen wir etwa $q := p \cup \{(\nu, p(\mu_p))\}$ und $Q := P$. Offensichtlich gilt $\tilde{q} = (q, Q) \leq_d \tilde{p}$.

Fall 3: $\nu \notin \operatorname{dom}(p)$ und $\mu_p \lhd \nu$. Sei $q := p \cup \{(\nu, \emptyset)\}$. Wir definieren

$$Q := \sigma^{-1}_{\nu \mu_p}[P] \cap \Delta^{\ll}_{\xi < \kappa} \bigcap_{\nu' \in \operatorname{dom}(p) \wedge \max(p(\nu')) \ll \xi} K^{\nu}_{\mu_p \nu'}.$$

Dann ist $Q \in U_\nu$ und somit gilt $\tilde{q} := (q, Q) \leq_d \tilde{p}$.

Fall 4: Sonst, d.h. $\nu \notin \operatorname{dom}(p)$ und weder $\nu \lhd \mu_p$ noch $\mu_p \lhd \nu$. Dann wählen wir $\nu' \in [\kappa, \lambda)$ mit $\nu, \mu_p \lhd \nu'$ und ein $\tilde{q}' \leq_d \tilde{p}$ mit $\nu' \in \operatorname{dom}(\tilde{q}')$ nach Fall 3. Wir befinden uns nun mit $\tilde{q}'$ und ν in Fall 2. q.e.d.

Bemerkungen: (1) In weiteren Konstruktionen benutzen wir oft die Methode für Fall 3 des Beweises. In diesem Fall gilt insbesondere $\mathrm{dom}(q) = \mathrm{dom}(p) \cup \{\nu\}$.

(2) Wenn $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$, $\nu \in [\kappa,\ \lambda)$ und $\xi < \kappa$ ist, so existiert eine Erweiterung $\tilde{r} \leq \tilde{p}$, so dass $\nu \in \mathrm{dom}(r)$ ist und $\max(r(\nu)) > \xi$ gilt.

Beweis: Sei $\tilde{q} = (q, Q) \leq_d \tilde{p}$ nach obigem Lemma und sei $\xi' \in Q \setminus^{\ll} (\xi + 1)$. Wir setzen $\tilde{r} := \tilde{q} \otimes_{\mu_q} \langle \xi' \rangle$. Dann gilt $\max(r(\nu)) \sim \xi' \gg \xi$.

Lemma 4.3.6 *Die Halbordnung $(\mathcal{P}_{GM}, \leq_d)$ ist $< \kappa$–abgeschlossen.*

Beweis: Seien $\kappa' < \kappa$ und eine Folge $(\tilde{p}_i)_{i<\kappa'}$ mit $i < j < \kappa' \to \tilde{p}_j \leq_d \tilde{p}_i$ gegeben. Wähle ein $\mu \in [\kappa,\ \lambda)$ mit $\nu \lhd \mu$ für alle $\nu \in \bigcup \mathrm{dom}(p_i)$, was nach Lemma 4.2.5 immer möglich ist. Für $i < \kappa'$ sei nun $\tilde{p}'_i = (p'_i, P'_i)$ eine Bedingung mit $\tilde{p}'_i \leq_d \tilde{p}_i$ und $p'_i = p_i \cup \{(\mu, \emptyset)\}$ nach Lemma 4.3.5, Fall 3. Dann ist

$$\tilde{q} = (q, Q) = \Big(\bigcup_{i<\kappa'} p'_i, \bigcap_{i<\kappa'} P'_i \Big)$$

direkte Erweiterung aller $\tilde{p}_i$ für $i < \kappa'$. q.e.d.

Lemma 4.3.7 *Die partielle Ordnung $\mathcal{P}_{GM}$ erfüllt die κ^{++}–c.c.*

Beweis: Sei $A := \langle \tilde{p}_i \mid i < \kappa^{++} \rangle \subseteq \mathcal{P}_{GM}$ eine Menge von Gitik–Magidor–Bedingungen. Wir benutzen $(\mathbf{GCH})^V$ und können nach dem Δ–System–Lemma ([Kun80], Theorem 1.6) o.B.d.A. annehmen, dass die Definitionsbereiche der p_i ein Δ–System der Mächtigkeit κ^{++} bilden. Es ist $card([\kappa]^{<\omega}_{\ll}) = \kappa$, also folgt aus dem Schubfachprinzip, dass es eine Teilmenge A' von A mit Kardinalität $\overline{\overline{A'}} = \kappa^{++}$ geben muss, so dass alle $p_i \in A'$ auf dem gemeinsamen Definitionsberich übereinstimmen.

Seien $\tilde{p}, \tilde{q} \in A'$. Wir zeigen, dass $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ kompatibel sind. Sei $\mu \in [\kappa,\ \lambda)$ in der Ordnung $\lhd$ größer als alle $\nu \in \mathrm{dom}(p) \cup \mathrm{dom}(q)$. Seien $\tilde{p}'$ und $\tilde{q}'$ direkte Erweiterungen von $\tilde{p}$ bzw. $\tilde{q}$ nach Lemma 4.3.5 Fall 3 so, dass $p'(\mu) = q'(\mu) = \emptyset$.

Wir definieren $\tilde{r} = (r, R)$ durch $r := p \cup q \cup \{(\mu, \emptyset)\}$ und $R := P' \cap Q'$. Dann gilt $\tilde{r} \in \mathcal{P}_{GM}$ und $\tilde{r}$ ist gemeinsame (direkte) Erweiterung von $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$. Also war A keine Antikette. q.e.d.

Aus der Antiketteneigenschaft erhalten wir Kardinalzahlbewahrung oberhalb von κ^+. Die Abgeschlossenheit von $\leq_d$ ergibt mit Hilfe des Prikry–Lemmas aus dem nächsten Abschnitt genauso wie bei Prikry–Forcing Kardinalzahlbewahrung unterhalb von κ und damit bis einschließlich κ. Für κ^+ werden wir ein zusätzliches Argument benötigen.

4.4 Das Prikry–Lemma

Dieser Abschnitt enthält die zentralen technischen Lemmata.

Lemma 4.4.1 *Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$, $D \subseteq \mathcal{P}_{GM}$ dicht, offen (mit der von $\leq$ erzeugten Topologie). Dann existiert eine Bedingung $\tilde{q} \in \mathcal{P}_{GM}, \tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ mit der Eigenschaft:*

$$\textit{Wenn } \tilde{r} \in D \textit{ ist, } \tilde{r} \leq \tilde{q} \textit{ und } \forall \nu \in \mathrm{dom}(r) \;\; \max(r(\mu_q)) \lessapprox \max(r(\nu)) \textit{ gilt, dann gilt } \tilde{q} \otimes_{\mu_q} r(\mu_q) \in D. \quad (4.1)$$

Für den Beweis dieses Lemmas ist folgende Schreibweise nützlich: Sei $\alpha \in \mathrm{On}$ und seien $(p_i)_{i<\alpha}$ Funktionen $p_i : \mathrm{dom}(p_i) \to V$. Dann bezeichnet $\sum_{i<\alpha} p_i$ die Funktion mit Definitionsbereich $\bigcup\{\mathrm{dom}(p_i) \mid i < \alpha\}$, die gegeben ist durch $\nu \mapsto p_i(\nu)$ für das minimale $i < \alpha$ mit $\nu \in \mathrm{dom}(p_i)$. Für endliches n schreiben wir auch kurz $p_1 + \ldots + p_n$ statt $\sum_{i \leq n} p_i$.

Beweis des Lemmas: Wir beschreiben ein Szenario mit einer hinreichend gut reflektierenden Substruktur $\mathcal{M}$ des Universums V, so dass $(\mathcal{P}_{GM}, \leq), \tilde{p}, D \in \mathcal{M}$ und $\kappa \subseteq \mathcal{M}, \overline{\overline{\mathcal{M}}} = \kappa$ sowie ${}^{<\kappa}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$. Eine solche Substruktur existiert, da wir $(\mathbf{GCH})^V$ annehmen. Sei nun $\mu \in \mathrm{On}$ eine $\lhd$-obere Schranke für $[\kappa, \lambda) \cap \mathcal{M}$ und sei $(a_i)_{i<\kappa}$ eine Aufzählung von $[\kappa]^{<\omega}_{\lll}$.

Wir werden rekursiv eine Folge $(\tilde{p}_i)_{i<\kappa}$ definieren, wobei $\tilde{p}_i \in M \cap \mathcal{P}_{GM}$ ist für $i < \kappa$. Wir beginnen mit $\tilde{p}_0 := \tilde{p}$. Für den Schritt $j < \kappa$ nehmen wir an, dass für $i < j$ alle $\tilde{p}_i = (p_i, P_i)$ bereits definiert seien. Sei $\nu_j \in [\kappa, \lambda)$ eine $\lhd$–obere Schranke für $\bigcup_{i<j} \mathrm{dom}(p_i)$ innerhalb von $\mathcal{M}$, diese Wahl ist wegen ${}^{<\kappa}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ möglich. Sei zunächst für jedes $i < j$ eine direkte Erweiterung $\tilde{p}_{ij} = (p_{ij}, P_{ij})$ von $\tilde{p}_i$ mit $\mathrm{dom}(p_{ij}) = \mathrm{dom}(p_i) \cup \{\nu_j\}$ wie in Lemma 4.3.5 Fall 3, konstruiert. Dann setzen wir

$$q_j := \Big(\sum_{i<j} p_i \cup \{(\nu_j, \emptyset)\}\Big) \otimes_\mu a_j$$

und

$$Q_j := \bigcap_{i<j} P_{ij} \setminus^{\ll} \max(a).$$

Dann ist $\tilde{q}_j := (q_j, Q_j)$ eine Bedingung und die Abgeschlossenheitseigenschaften von $\mathcal{M}$ sichern $\tilde{q}_j \in \mathcal{P}_{GM} \cap \mathcal{M}$.

FALL 1: $\exists \tilde{r} \in D \, \big(\tilde{r} \leq_d \tilde{q}_j \wedge \forall \nu \in \mathrm{dom}(r) \; \max(a_j) \lessapprox \max(r(\nu))\big)$.

Dann gilt nach Wahl von $\mathcal{M}$ derselbe Satz auch in $\mathcal{M}$ und wir wählen ein solches $\tilde{p}_j \in D \cap \mathcal{M}$, $\tilde{p}_j \leq_d \tilde{q}_j$.

FALL 2: nicht Fall 1. Dann setzen wir $\tilde{p}_j := \tilde{q}_j$.

Damit ist die Rekursion beendet und es ist μ eine $\lhd$–obere Schranke für $\bigcup_{i<\kappa} \mathrm{dom}(p_i)$. Seien wie in Lemma 4.3.5 für $i < \kappa$ Bedingungen $\tilde{p}_i' \leq_d \tilde{p}_i$ mit $p_i' = p_i \cup \{(\mu, \emptyset)\}$ gewählt. Wir definieren nun $\tilde{q}$:

$$\tilde{q} := (q, Q) := \Big(\sum_{i<\kappa} p_i \cup \{(\mu, \emptyset)\}, \triangle^{\ll}_{i<\kappa} P_i'\Big).$$

Dann gelten folgende Behauptungen:

1. $\tilde{q} \in \mathcal{P}_{GM}$

   BEWEIS: Wir überprüfen (1) – (5) aus der Definition von $\mathcal{P}_{GM}$ (Definition 4.3.1): (1) gilt nach Definition der Summenoperation Σ, (2) nach Wahl von μ und (3) trivialerweise, da $p(\mu) = \emptyset$. Bedingung (4) folgt, da Q Diagonalschnitt von Elementen von U_μ ist und dieser Ultrafilter $\ll$–normal war.

   Zu (5): Sei $\xi < \kappa$. Es gibt weniger als κ viele $i < \kappa$ mit $\max(a_i) \leq \xi$ und es steuern nur solche p_i in der Definition von q neue Koordinaten ν mit $\max(q(\nu)) < \xi$ bei. Für jedes solche p_i gilt aber Bedingung (5) und es ergibt sich $card(\{\nu \in \mathrm{dom}(q) \mid \max(q(\nu)) < \xi\}) < \kappa$, da κ regulär ist.

2. $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$

   BEWEIS: In der Summenbildung in der Definition von $\tilde{q}$ werden die endlichen $\ll$–aufsteigenden Folgen nach ihrem ersten Auftreten nicht mehr verändert, ferner gilt nach Definition $Q \subseteq P_0'$, also folgt $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}_0' \leq_d \tilde{p}_0 = \tilde{p}$.

3. Für alle $i < \kappa$ gilt $\tilde{q} \otimes_\mu a_i \leq_d \tilde{p}_i$.

   Beweis: Es gilt für alle $i < \kappa :\ \sum_{j<i} p_j \otimes_\mu a_i \subseteq q_i \subseteq p_i$. Bei der Wahl von $\tilde{p}_i$ wurde $\forall \nu \in \mathrm{dom}(p_i)\ \max(a_i) \lesssim \max(p_i(\nu))$ verlangt, also haben wir $p_i = p_i \otimes_\mu a_i$. Daraus folgt

$$p_i = (\sum_{j<i} p_j) \otimes_\mu a_i + p_i = (\sum_{j\leq i} p_j) \otimes_\mu a_i \subseteq q_{i+1} \subseteq p_{i+1} \subseteq q.$$

   Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{q} \otimes_\mu a_i &= (q \otimes_\mu a_i, Q \setminus^{\ll} (\max(a_i)+1)) && \text{nach Definition } \otimes \\
&\leq_d (q \otimes_\mu a_i, P_i') && \text{wegen } \max(a_i) \ll \min(P_i') \\
&\leq_d ((p_i \cup \{\langle \mu, \emptyset \rangle\}) \otimes_\mu a_i, P_i') && \\
&\leq_d (p_i \otimes_\mu a_i, P_i) && \\
&= \tilde{p}_i. &&
\end{aligned}$$

4. Eigenschaft (4.1) gilt für $\tilde{q}$.

   Beweis: Wir bemerken, dass μ $\lhd$–maximal im Definitionsbereich von q ist und betrachten eine Bedingung $\tilde{r} = (r, R) \leq \tilde{q}$ mit $\tilde{r} \in D$ und der Eigenschaft $\forall \nu \in \mathrm{dom}(r)\ \max(r(\mu_q)) \lesssim \max(r(\nu))$. Nach dem 2–Schritt–Lemma 4.3.4 gilt

$$\tilde{r} \leq_d \tilde{q} \otimes_\mu r(\mu) = \tilde{q} \otimes_\mu (r(\mu) \setminus q(\mu)) \leq_r \tilde{q}.$$

   Es ist $r(\mu) \setminus q(\mu)$ endliche $\ll$-aufsteigende Folge, sei also $j < \kappa$ so, dass $a_j = r(\mu) \setminus q(\mu)$. Dann gilt $\tilde{r} \leq_d \tilde{q} \otimes_\mu a_j \leq_d \tilde{p}_j \leq_d \tilde{q}_j$. Wegen $\tilde{r} \in D$ wurde $\tilde{p}_j$ in der Rekursion nach Fall 1 gewählt, ist also in D. Weil D offen ist und $\tilde{q} \otimes_\mu r(\mu) = \tilde{q} \otimes_\mu a_j \leq p_j$ gilt, folgt $\tilde{q} \otimes_\mu r(\mu) \in D$.

q.e.d.

Für spätere Zwecke verallgemeinern wir obiges Lemma so, dass 4.1 für weniger als κ viele dichte Mengen gleichzeitig gilt.

Lemma 4.4.2 *Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$, sei $\rho < \kappa$ und seien für $i < \rho$ die Mengen $D_i \subseteq \mathcal{P}_{GM}$ dicht und offen. Dann existiert eine Bedingung $\tilde{q} \in \mathcal{P}_{GM}, \tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ mit der Eigenschaft:*

$$\text{Wenn } \tilde{r} \in D_i \text{ ist, } \tilde{r} \leq \tilde{q} \text{ und } \forall \nu \in \mathrm{dom}(r)\ \max(r(\mu_q)) \lesssim \max(r(\nu)) \text{ gilt,}$$
$$\text{dann gilt } \tilde{q} \otimes_{\mu_q} r(\mu_q) \in D_i, \quad (4.2)$$

für alle $i < \rho$.

Beweis: Es reicht, obigen Beweis leicht zu verändern. Die Substruktur $\mathcal{M}$ von V enthalte nun zusätzlich alle D_i, $i < \rho$ als Konstanten. Sei nun eine Aufzählung $\langle (a_{i(t)}, D_{j(t)}) | t < \kappa \rangle$ von $[\kappa]^{<\omega}_{\lll} \times \{D_i | i < \rho\}$ gegeben. Die rekursive Konstruktion der Folge $(\tilde{p}_i)_{i<\kappa}$ erfolgt längs dieser Aufzählung, so dass nun alle Paare (a_i, D_j) behandelt werden. Die direkte Erweiterung $\tilde{q}$ von $\tilde{p}$ wird wie in obigem Beweis von 4.4.1 definiert. Dann gelten die Behauptungen 1. und 2. sowie folgendes Analogon zu 3.: für alle $t < \kappa$ gilt: $\tilde{q} \otimes a_{i(t)} \leq_d \tilde{p}_t$. Daraus folgt wie im Beweis von 4.4.1 Eigenschaft (4.2) für jedes $i < \rho$. q.e.d.

Ein anderer Beweis scheint sich für das letzte Lemma anzubieten: Man könnte rekursiv Lemma 4.4.1 anwenden und dabei die $\leq \kappa$–Abgeschlossenheit von von $\leq_d$ ausnutzen. Diese Idee läßt sich ad hoc nicht so durchführen, denn die Bedingung $\forall \nu \ \max(r(\mu_q)) \lesssim\!\!\!\ll \max(r(\nu))$ ist zu beachten.

Satz 4.4.3 (Prikry–Lemma) *Sei φ ein Satz in der Forcing–Sprache und sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$. Dann gibt es eine direkte Erweiterung $\tilde{q} \in \mathcal{P}_{GM}$, $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$, die φ entscheidet, d.h. $\tilde{r} \Vdash \varphi$ oder $\tilde{r} \Vdash \neg\varphi$.*

Beweis: Die Menge D aller Bedingungen aus $\mathcal{P}_{GM}$, die φ entscheiden, ist dicht und offen. Sei $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$, $\mu_q = \mu$ nach dem vorhergehenden Lemma gewählt mit

$$\text{Wenn } \tilde{r} \in D \text{ ist, } \tilde{r} \leq \tilde{q} \text{ und } \forall \nu \in \mathrm{dom}(r)\ \max(r(\mu_q)) \lesssim\!\!\!\ll \max(r(\nu)) \text{ gilt,}$$
$$\text{dann gilt } \tilde{q} \otimes r(\mu_q) \in D.$$

Sei $\mathcal{M}$ eine hinreichend gute transitive Struktur in der Sprache der ersten Stufe mit $\varphi \in \mathcal{M}$ und $\kappa \subseteq \mathcal{M}$, d.h. sie enthalte alle im weiteren Verlauf dieses Beweises auftretenden Konstanten und reflektiere die Eigenschaften von V genügend gut. Nach 4.1.5 gibt es eine Menge $I \in U_\mu$ von $\ll$–Ununterscheidbaren für $\mathcal{M}$. Wir definieren $R := I \cap Q$ und $\tilde{r} := (q, R)$. Dann gilt $\tilde{r} \leq_d \tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ folgende

Behauptung: $\tilde{r}$ entscheidet φ.

Beweis: Angenommen nicht, so seien $\tilde{r}^+, \tilde{r}^- \in \mathcal{P}_{GM}$, $\tilde{r}^+, \tilde{r}^- \leq \tilde{r}$ Bedingungen, die φ verschieden entscheiden, etwa $\tilde{r}^+ \Vdash \varphi, \tilde{r}^- \Vdash \neg\varphi$. O.B.d.A gilt $\forall \nu \in \mathrm{dom}(r^+) \max(r^+(\mu_q)) \lesssim\!\!\!\ll \max(r^+(\nu))$ und dieselbe Aussage auch für r^- an Stelle von r^+, sonst gehen wir zu passenden Reflektionserweiterungen über. Ebenso kann erreicht werden, dass $r^+(\mu)$ und $r^-(\mu)$ dieselbe Länge n haben.

Nach Lemma 4.4.1 gilt nun

$$\begin{array}{lll} \tilde{q} \otimes_\mu r^+(\mu) \in D & \text{nämlich} & \tilde{q} \otimes_\mu r^+(\mu) \Vdash \varphi \\ \tilde{q} \otimes_\mu r^-(\mu) \in D & \text{nämlich} & \tilde{q} \otimes_\mu r^-(\mu) \Vdash \neg\varphi \end{array}$$

Also haben $r^+(\mu)$ und $r^-(\mu)$ verschiedene Eigenschaften relativ zu den Konstanten $\tilde{q}, \mu, \varphi$, bestehen jedoch nur aus $\ll$–ununterscheidbaren Zahlen für $\mathcal{M}$. Widerspruch. q.e.d.

4.5 Die Gitik–Magidor–Erweiterung

Sei von nun an G ein $\mathcal{P}_{GM}$-generischer Filter über V. Wir zeigen zunächst, dass es in der Forcing-Erweiterung $V[G]$ neue in κ konfinale Folgen der Länge ω gibt.

Lemma 4.5.1 *Sei $\nu \in [\kappa, \lambda)$. Dann ist*

$$g_\nu := \bigcup \{p(\nu) \mid \nu \in \text{dom}(p) \ \wedge \ \exists P \subseteq \kappa \ (p, P) \in G\}$$

unbeschränkt in κ und hat Ordnungstyp ω. Insbesondere gilt $(cof(\kappa) = \omega)^{V[G]}$.

Beweis: Sei $\nu \in [\kappa, \lambda)$. Alle $p(\nu)$ sind endlich und für kompatible $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathcal{P}_{GM}$ muss $p(\nu)$ ein Anfangsstück von $q(\nu)$ sein oder umgekehrt. Als Vereinigung endlicher durch Enderweiterung geordneter Folgen hat g_ν Ordnungstyp $\leq \omega$. Nach der zweiten Bemerkung zu Lemma 4.3.5 liegt $D_{\xi,\nu} := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM} \mid \nu \in \text{dom}(p) \ \wedge \ p(\nu) > \xi\}$ dicht in $\mathcal{P}_{GM}$. Insbesondere ist g_ν nicht die leere Folge und g_ν (genauer range(g_ν)) liegt unbeschränkt unter κ und ist unendlich.
q.e.d.

4.5.1 Kardinalzahlbewahrung

Im Gegensatz zu diesen neuen in κ unbeschränkten Folgen werden keine beschränkten Teilmengen von κ addiert. Wir nutzen das Prikry-Lemma und die $< \kappa$–Abgeschlossenheit von $(\mathcal{P}_{GM}, \leq_d)$ aus und verallgemeinern den Beweis des entsprechenden Lemmas über die Prikry-Erweiterung.

Satz 4.5.2 *Es gilt:* $(V_\kappa)^V = (V_\kappa)^{V[G]}$.

Beweis: Der Beweis des entsprechenden Lemmas über die Prikry–Erweiterung (Lemma 3.4.1) wird übertragen und verfeinert.

Sei $x \in {V_\kappa}^{V[G]}$ beschränkte Teilmenge von κ, etwa $x \subseteq \alpha < \kappa$. Dann existiert nach dem Forcing-Theorem ein Name $\dot{x}$ in V der durch G als x interpretiert wird, d.h. $\dot{x}^G = x$ und eine Bedingung $\tilde{p} = (p, P) \in G$, die dies erzwingt, $\tilde{p} \Vdash \dot{x} \subseteq \check{\alpha}$. Es reicht, eine Bedingung $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ und eine Menge y aus dem Grundmodell V zu finden, so dass $\tilde{q} \Vdash \dot{x} = \check{y}$.

Wir konstruieren dazu rekursiv eine $\leq_d$–fallende Folge von Bedingungen $\tilde{q}_\beta = (p, Q_\beta) \in \mathcal{P}_{GM}$ für $\beta \leq \alpha$. Setze $\tilde{q}_0 := \tilde{p}$. Wir wenden im Nachfolgerschritt das Prikry–Lemma 4.4.3 auf $\tilde{q}_\beta$ und $\check{\beta} \in \dot{x}$ an und erhalten $\tilde{q}_{\beta+1} \leq_d \tilde{q}_\beta$, so dass der Ausdruck $\check{\beta} \in \dot{x}$ von $\tilde{q}_{\beta+1}$ entschieden wird. Falls β Limeszahl ist, so existiert eine direkte Erweiterung $\tilde{q}_\beta \leq_d \tilde{q}_{\beta'}$ für alle $\beta' < \beta$ aufgrund der $< \kappa$–Abgeschlossenheit von $\leq_d$. Setze

$$y := \{\beta < \alpha | (p, Q_{\beta+1}) \Vdash \check{\beta} \in \dot{x}\}.$$

Dann gilt $\tilde{q}_\alpha \Vdash \check{y} = \dot{x}$, denn es ist $\tilde{q}_\alpha \leq_d \tilde{q}_\beta$ für alle $\beta < \alpha$.

Wir können nun analog wie in Lemma 3.4.1 zu beliebigen Mengen in $(V_\kappa)^{V[G]}$ übergehen, in dem wir sie injektiv in die Ordinalzahlen abbilden.

q.e.d.

Lemma 4.5.3 *Die Kardinalzahl κ^+ wird durch $\mathcal{P}_{GM}$ nicht kollabiert, d.h. es gilt*

$$(\kappa^+)^{V[G]} = (\kappa^+)^V.$$

Beweis: Angenommen nicht, d.h. $(\kappa^+)^V < (\kappa^+)^{V[G]}$. Dann gilt $V[G] \models cof((\kappa^+)^V) \leq \kappa$. Da $V[G] \models cof(\kappa) = \omega$ ist, kann κ nicht Konfinalität irgendeiner Zahl sein. Wenn wir setzen $\rho := \left(cof((\kappa^+)^V)\right)^{V[G]}$, dann haben wir $\rho < \kappa$.

Sei nun $f \in V[G]$ eine Funktion $f : \rho \to (\kappa^+)^V$, die dies bezeugt, d.h. range(f) unbeschränkt in $(\kappa^+)^V$. Nach dem Forcing–Theorem finden wir nun im Grundmodell einen Namen $\dot{f}$, so dass $\dot{f}^G = f$ sowie eine Bedingung $\tilde{p} \in G$, die diese Aussage erzwingt:

$$\tilde{p} \Vdash \dot{f} : \check{\rho} \to (\kappa^+)^V \text{unbeschränkt}$$

Für $i < \rho$ sei $D_i := \{\tilde{r} \leq \tilde{p} \mid \exists \xi < (\kappa^+)^V \ \tilde{r} \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \check{\xi}\}$. Dann ist D_i dicht offen unter $\tilde{p}$ für jedes i. Sei nach Lemma 4.4.2 die Bedingung $\tilde{q}$ eine direkte

Erweiterung von $\tilde{p}$ derart, dass für alle $i < \rho$ gilt

$$\text{Wenn } \tilde{r} \in D_i \text{ ist, } \tilde{r} \leq \tilde{q} \text{ und } \forall \nu \in \mathrm{dom}(r) \max(r(\mu_q)) \lessapprox \max(r(\nu)) \text{ gilt,}$$
$$\text{dann gilt bereits } \tilde{q} \otimes_{\mu_q} r(\mu_q) \in D_i.$$

Wie definieren

$$X := \{\xi < (\kappa^+)^V \mid \exists i < \rho \ \exists a \in [\kappa]^{<\omega}_{\ll} \ \tilde{q} \otimes_{\mu_q} a \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \check{\xi}\}.$$

Dann ist X im Grundmodell und wir beweisen folgende

Behauptung: Es gilt: $\tilde{q} \Vdash \dot{f} : \check{\rho} \to \check{X}$.
Beweis: Angenommen nicht, sei $\tilde{r} \leq \tilde{q}$ gewählt mit $\tilde{r} \Vdash \neg \dot{f} : \check{\rho} \to \check{X}$. Da $\tilde{r} \leq \tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ ist und bereits $\tilde{p} \Vdash \dot{f}$ ist Funktion mit Definitionsbereich ρ gilt, kann dies nur daran liegen, dass $\tilde{r} \Vdash \neg\mathrm{range}(\dot{f}) \subset \check{X}$ gilt. Das bedeutet aber, dass ein $i < \rho$ existiert, so dass $\tilde{r}$ den Ausdruck $\dot{f}(\check{i}) = \check{\xi} \notin \check{X}$ für eine geeignete Ordinalzahl ξ erzwingt, also haben wir $\tilde{r} \in D_i$. Nach Wahl von $\tilde{q}$ gilt nun bereits $\tilde{q} \otimes_{\mu_q} r(\mu_q) \in D_i$. Nach Definition von D_i heißt das $\exists \xi' < (\kappa^+)^V : \ \tilde{q} \otimes_{\mu_q} r(\mu_q) \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \check{\xi}'$. Da aber nach dem 2–Schritt–Lemma 4.3.4 $\tilde{r} \leq_d \tilde{q} \otimes_{\mu_q} r(\mu_q)$ gilt, kann $\tilde{q} \otimes_{\mu_q} r(\mu_q)$ nicht einen anderen Wert für $\dot{f}(\check{i})$ erzwingen als $\tilde{r}$. Folglich gilt $\tilde{q} \otimes_{\mu_q} r(\mu_q) \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \check{\xi}$ und somit $\xi \in X$. Widerspruch.

Zum Beweis des Lemmas schätzen wir die Mächtigkeit von X ab durch: $card(X) \leq \rho \cdot card([\kappa]^{<\omega}_{\ll}) = \rho \cdot \kappa = \kappa < (\kappa^+)^V$. Dies bedeutet

$$\tilde{q} \Vdash \dot{f} : \check{\rho} \to (\kappa^+)^V \text{ beschränkt unter } (\kappa^+)^V$$

im Widerspruch zur Wahl von $\tilde{p}$ und $\tilde{q} \leq \tilde{p}$. q.e.d.

Satz 4.5.4 *Forcing mit $\mathcal{P}_{GM}$ bewahrt Kardinalitäten.*

Beweis: Alle Kardinalzahlen $< \kappa$ bleiben nach Lemma 4.5.2 erhalten. Als Limeszahl bleibt dann auch κ erhalten (vgl. Satz 3.4.2). Dass κ^+ nicht kollabiert wird, wurde soeben gezeigt. Schließlich bleiben alle Kardinalitäten $\geq \kappa^{++}$ erhalten, da $\mathcal{P}_{GM}$ die κ^{++}–c.c. erfüllt (Lemma 4.3.7). q.e.d.

4.5.2 Zur Singulären Kardinalzahlen Hypothese

Ziel dieses Kapitels ist die Konstruktion eines Modells von $\neg$ **SCH**. Da κ in $V[G]$ singulär ist und das Forcing keine Kardinalzahlen kollabiert, reicht es $(2^\kappa \geq \kappa^{++})^{V[G]}$ zu zeigen. In Lemma 4.5.1 wurde für jedes $\nu \in [\kappa,\ \lambda)$ eine Folge

$$g_\nu := \bigcup\{p(\nu) \mid \nu \in \mathrm{dom}(p) \ \wedge\ \exists P \subseteq \kappa\ (p,P) \in G\}$$

definiert, wobei G der $\mathcal{P}_{GM}$–generische Filter war. Diese Folgen werden jetzt genauer untersucht. Unser Ziel ist, zu zeigen, dass sich Folgen mit verschiedenen Indices unterscheiden.

Lemma 4.5.5 *Seien $\nu, \nu' \in [\kappa,\ \lambda)$.*

(1) *Es gilt für alle Mengen $X \in \mathrm{Pot}(\kappa) \cap V$:*

$$X \in U_\nu \textit{ genau dann, wenn } g_\nu \setminus X \textit{ endlich ist.}$$

(2) *Wenn $\nu \lhd \nu'$ gilt, dann ist die symmetrische Differenz*

$$g_\nu \bigtriangleup \sigma_{\nu'\nu}[g_{\nu'}] \quad \textit{endlich.}$$

(3) *Wenn $\nu \neq \nu'$ ist, so ist*

$$g_\nu \cap g_{\nu'} \textit{ endlich.}$$

Beweis: Zu (1): Sei $\nu \in [\kappa,\ \lambda)$ und $X \in V$ mit $X \subseteq \kappa$.

$\longrightarrow$: Sei $X \in U_\nu$ und sei

$$D := \{\tilde{p} = (p,P) \in \mathcal{P}_{GM} \mid \nu \in \mathrm{dom}(p) \ \wedge\ P \subseteq \sigma^{-1}_{\mu_p\nu}[X]\}.$$

Behauptung: D ist dicht in $\mathcal{P}_{GM}$.

Beweis: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$. Nach dem Erweiterungslemma 4.3.5 existiert ein $\tilde{q} = (q,Q) \in \mathcal{P}_{GM}$ mit $\nu \in \mathrm{dom}(q)$, so dass $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$. Wir definieren $Q' := Q \cap \sigma^{-1}_{\mu_p\nu}[X]$. Nach Satz 4.2.3 ist $\sigma^{-1}_{\mu_p\nu}[X] \in U_{\mu_p}$. Da U_ν Filter ist, ist auch $Q' \in U_\nu$. Dann gilt $\tilde{q}' := (q, Q') \leq_d \tilde{q} \leq \tilde{p}$ und D ist dicht.

Sei also $\tilde{p} \in D \cap G$ und sei $\tilde{q}$ beliebige Verstärkung von $\tilde{p}$. Das 2–Schritt–Lemma 4.3.4 besagt

$$\begin{aligned} \tilde{q} &\leq_d \tilde{p} \otimes_{\mu_p} q(\mu_p) \\ &= \tilde{p} \otimes_{\mu_p} (q(\mu_p) \setminus p(\mu_p)) \leq_r \tilde{p} \end{aligned}$$

Aus dem $\leq_r$ folgt, dass $q(\mu_p) \setminus p(\mu_p) \subseteq P \subseteq \sigma^{-1}_{\mu_p\nu}[X]$ gilt, denn $\tilde{p}$ war als Element von D gewählt. Dann gilt $q(\nu) = p(\nu) \cup \sigma_{\mu_p\nu}[q(\mu_p) \setminus p(\mu_p)]$, also auch

$$q(\nu) \setminus p(\nu) = \sigma_{\mu_p\nu}[q(\mu_p) \setminus p(\mu_p)] \subseteq X.$$

Sei nun $\xi \in g_\nu \setminus p(\nu)$. Dann gibt es nach Definition von g_ν ein $\tilde{r} \in G$ mit $\nu \in \mathrm{dom}(r)$, $\xi \in r(\nu)$. Sei $\tilde{q} \in G$ gewählt, so dass $\tilde{q} \leq \tilde{p}, \tilde{r}$. Nach dem letzten Absatz gilt $\xi \in q(\nu) \setminus p(\nu) \subseteq X$. Da $p(\nu)$ endlich sein muss, ist auch $g_\nu \setminus X$ endlich.

$\longleftarrow$: Gelte $g_\nu \setminus X$ endlich. Angenommen, $X \notin U_\nu$, d.h. $\bar{X} = \kappa \setminus X \in U_\nu$. Dann folgt aus der eben gezeigten Richtung von links nach rechts, dass $g_\nu \setminus \bar{X}$ endlich ist. Jedoch gilt $g_\nu = (g_\nu \setminus X) \cup (g_\nu \setminus \bar{X})$ und g_ν wäre endlich. Widerspruch.

Zu (2): Gelte $\nu \lhd \nu'$ und sei $D := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM} \,|\, \nu, \nu' \in \mathrm{dom}(p) \,\wedge\, P \subseteq K^{\mu_p}_{\nu'\nu}\}$. Nach derselben Argumentation wie in (1), d.h. zweimaliges Verwenden des Erweiterungslemmas und wegen $K^{\mu_p}_{\nu'\nu} \in U_{\mu_p}$ folgt, dass D dicht in $\mathcal{P}_{GM}$ ist.

Sei $\tilde{p} \in D \cap G$ und sei $\tilde{q} \in G$ beliebig mit $\tilde{q} \leq \tilde{p}$. Wie in (1) erhalten wir $q(\nu) \setminus p(\nu) = \sigma_{\mu_p\nu}[q(\mu_p) \setminus p(\mu_p)]$ und folgern nach Definition von g_ν und g_{μ_p}, dass

$$g_\nu \setminus p(\nu) \subseteq \sigma_{\mu_p\nu}[g(\mu_p) \setminus p(\mu_p)]$$

ist, denn es gilt nicht $\max(p(\nu)) \ll \max(p(\mu_p))$.

Analog gilt für ν' an Stelle von ν

$$g_{\nu'} \setminus p(\nu') \subseteq \sigma_{\mu_p\nu'}[g(\mu_p) \setminus p(\mu_p)].$$

Wenn nun $\xi := \max\{p(\nu), p(\nu')\}$ gesetzt wird, so gilt $g_\nu \setminus \xi = \sigma_{\mu_p\nu}[g_{\mu_p} \setminus \xi] = \sigma_{\nu\nu'} \circ \sigma_{\mu_p\nu'}[g_{\mu_p} \setminus \xi] = \sigma_{\nu\nu'}[g_{\nu'} \setminus \xi]$. Dabei nutzen wir für die zweite Gleichheit die Kommutativität aus, die wegen $\xi \in K^{\mu_p}_{\nu'\nu}$ gilt. Die Behauptung folgt nun aus der Endlichkeit von $p(\nu)$ und $p(\nu')$.

Zu (3): Gelte $\nu \neq \nu'$ und sei $\mu \in [\kappa, \lambda)$ eine $\lhd$–obere Schranke für ν und ν'. Seien $\xi_1, \xi_2 < \kappa$ wie im Beweis von (2) gewählt mit

$$\begin{aligned} g_\nu \setminus \xi_1 &= \sigma_{\mu\nu}[g_\mu \setminus \xi_1] \\ g_{\nu'} \setminus \xi_2 &= \sigma_{\mu\nu'}[g_\mu \setminus \xi_2]. \end{aligned}$$

Sei weiter $\xi_3 < \kappa$ nach (1) gewählt mit

$$g_\mu \setminus \xi_3 \subseteq \{\xi < \kappa \,|\, \sigma_{\mu\nu}(\xi) \neq \sigma_{\mu\nu'}(\xi)\},$$

wobei die Menge auf der rechten Seite nach Satz 4.2.3 in U_μ ist. Wir setzen $\xi := \max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ und es gilt $g_\nu \setminus \xi \cap g_{\nu'} \setminus \xi = \emptyset$. q.e.d.

Alle bisherigen Argumente ließen sich für beliebige c, λ mit den Eigenschaften wie zu Beginn von Abschnitt 4.2 beschrieben insbesondere $\lambda < \pi(\kappa)$ durchführen. Um ein Modell von $\neg$**SCH** zu erhalten, setzen wir nun

$$\lambda := (\kappa^{++})^V = (\kappa^{++})^{V[G]}$$

und c als die Menge der starken Limeskardinalzahlen unter κ fest. Diese Festlegung ist nach den Forderungen an die Einbettung $\pi\colon V \to M$ möglich.

Damit können wir die Potenzmenge von κ in $V[G]$ bestimmen, wobei G ab jetzt $\mathcal{P}_{GM}$–generisch über V ist für die spezielle Gitik–Magidor–Halbordnung mit λ und c wie oben.

Satz 4.5.6

$$V[G] \models 2^\kappa = \lambda.$$

Beweis: Die Ungleichung $2^\kappa \geq \lambda$ folgt sofort aus Lemma 4.5.5(3).

Zu $\leq$: Wir benutzen 'nice names' für Teilmengen von κ, wie in Kunens Buch [Kun80] VII,5 dargestellt. In V hat $\mathcal{P}_{GM}$ Kardinalität $\lambda = (\kappa^{++})^V$. Ferner erfüllt $\mathcal{P}_{GM}$ die κ^{++}–c.c., also gibt es höchstens $(\lambda)^{\kappa^+} = \lambda$ viele Antiketten in $\mathcal{P}_{GM}$. Folglich gibt es auch nur $(\lambda)^{\kappa^+} = \lambda$ viele 'nice names' für Teilmengen von κ, die wir als $\langle \dot{x}_\nu \mid \nu < \lambda \rangle$ aufzählen. Sei $\dot{y}$ ein Name für diese Aufzählung, $\dot{y} := \{(\nu, \dot{x}_\nu) \mid \nu < \lambda\}$. Dann ist $\dot{y}^G$ eine Funktion mit Definitionsbereich λ und es gilt $\mathrm{Pot}(\kappa) \subseteq \mathrm{range}(\dot{y}^G)$. Es folgt $2^\kappa \leq \lambda$. q.e.d.

Satz 4.5.7

$$V[G] \models \mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{SCH}.$$

Beweis: Da im Grundmodell **GCH** vorausgesetzt wurde und keine beschränkten Teilmengen von κ addiert wurden (Lemma 4.5.2), gilt immer noch $\forall \mu < \kappa\ 2^\mu = \mu^+$. Da keine Kardinalzahlen kollabiert werden (Lemma 4.5.4), gilt $\lambda = (\kappa^{++})^V = (\kappa^{++})^{V[G]}$. Mit Satz 4.5.6 folgt

$$(2^\kappa \geq \kappa^{++})^{V[G]}.$$

Da aber nach Lemma 4.5.1 κ in $V[G]$ singulär ist, ist der Satz bewiesen. q.e.d.

Nach Ergebnissen von Mitchell [Mit84] ist zur Konstruktion eines Modells von **ZFC** + ¬**SCH** die Konsistenzstärke einer messbaren Zahl der Mitchell - Ordnung $o(\kappa) = \kappa^{++}$ notwendig. Gitik gelang es in [Git89], die Äquikonsistenz dieser Annahmen zu zeigen. Unsere Annahme hat dieselbe Konsistenzstärke wie die von Gitik und Magidor in [GM92] gemachten Annahmen. Sie entspricht $o(\kappa) = \kappa^{++} + 1$ (vgl. [GM92]), ist also nur fast optimal.

4.6 Gitik–Magidor–Systeme

Sei weiterhin G ein $\mathcal{P}_{GM}$–generischer Filter über V. Wir verallgemeinern Prikry–Folge in natürlicher Weise und nennen eine in κ konfinale Folge g mit Ordnungstyp ω, die Lemma 4.5.5(1) erfüllt, Prikry–Folge zum Ultrafilter U_ν. Wir nennen $\langle g_\nu \,|\, \nu \in [\kappa, \lambda)\rangle$ das von G induzierte *System von Prikry–Folgen.*

Wir werden sehen, dass im Gegensatz zu Prikry–Forcing bei Gitik–Magidor–Forcing ein Rückgewinnen des generischen Filters G aus dem System der Prikry–Folgen nicht möglich ist. Dazu führen wir einen neuen Begriff ein: Sei $g = \langle g_\nu \,|\, \nu \in [\kappa, \lambda)\rangle$ das von G induzierte System von Prikry–Folgen. Eine Bedingung $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$ nennen wir dann *kompatibel* mit g genau dann, wenn gilt

(1) $\forall \nu \in dom(p)\; g_\nu = p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p \nu}[g_{\mu_p}]$,

(2) $g_{\mu_p} \setminus p(\mu_p) \subseteq P$.

Bemerkung: Ist $g = \langle g_\nu \mid \nu \in [\kappa, \lambda)\rangle$ das System von Prikry-Folgen zum generischen Filter G, dann existieren $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathcal{P}_{GM}$, die beide kompatibel mit g sind, aber $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ sind nicht kompatibel (im Sinne von $(\mathcal{P}_{GM}, \leq)$).

Beweis: Wir konstruieren inkompatible Bedingungen $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathcal{P}_{GM}$ wie folgt: Seien zwei disjunkte Teilmengen d_1 und d_2 der Kardinalität κ von $[\kappa, \lambda)$ gegeben. Sei $\mu \in [\kappa, \lambda)$ eine neue $\lhd$–obere Schranke von $d_1 \cup d_2$ (d.h. $\mu \notin d_1 \cup d_2$ und $\forall \nu \in d_1 \cup d_2\; \nu \lhd \mu$). Sei $\{\nu_i \,|\, i < \kappa\}$ eine Aufzählung von d_1, dann setzen wir

$$p'(\nu_i) := (g_{\nu_i} \cap ((\max(\sigma_{\mu\nu_i}[g_\mu] \triangle g_{\nu_i}) + 1) + i) \\ \cup \{\min(g_{\nu_i} \setminus ((\max(\sigma_{\mu\nu_i}[g_\mu] \triangle g_{\nu_i}) + 1) + i)\}.$$

Analog wählen wir $q' : d_2 \to [\kappa]^{<\omega}_{\ll}$ so, dass $\forall \nu \in d_2\; q'(\nu) \subseteq g_\nu$ und die Maxima der $q'(\nu)$ unbeschränkt in κ liegen.

Wir definieren $p : d_1 \cup d_2 \cup \{\mu\} \to [\kappa]^{<\omega}_{\ll}$ durch

$$p(\nu) = \begin{cases} p'(\nu) & \text{falls } \nu \in d_1 \\ q'(\nu) \cup \{\min(g_\nu \setminus q'(\nu))\} & \text{falls } \nu \in d_2 \\ \emptyset & \text{falls } \nu = \mu \end{cases}$$

und entsprechend $q : d_1 \cup d_2 \cup \{\mu\} \to [\kappa]^{<\omega}_{\ll}$ durch

$$q(\nu) = \begin{cases} p'(\nu) \cup \{\min(g_\nu \setminus p'(\nu))\} & \text{falls } \nu \in d_1 \\ q'(\nu) & \text{falls } \nu \in d_2 \\ \emptyset & \text{falls } \nu = \mu. \end{cases}$$

Weiter sei $P = Q \in U_\mu$ gewählt, so dass $g_\mu \subseteq P$. Nach Konstruktion sind $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ kompatibel mit dem System g der Prikry-Folgen.

Behauptung: Es sind $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ inkompatibel in $(\mathcal{P}_{GM}, \leq)$.
Beweis: Angenommen nicht. Sei $\tilde{r} \leq \tilde{p}, \tilde{q}$. Das 2–Schritt–Lemma besagt dann $\tilde{r} \leq_d \tilde{p} \otimes_\mu r(\mu) \leq_r \tilde{p}$. Für alle $\nu \in \mathrm{dom}(p)$ mit $\max(p(\nu)) \gg \max(r(\mu))$ muss dann gelten $r(\nu) = p(\nu)$. Analog gilt $\tilde{r} \leq_d \tilde{q} \otimes_\mu r(\mu) \leq_r \tilde{q}$ und auch $r(\nu) = q(\nu)$ für alle $\nu \in \mathrm{dom}(q)$ mit $\max(q(\nu)) \gg \max(r(\mu))$. Da $r(\mu)$ endlich ist, also beschränkt unter κ, muss es immer solche $\nu \in \mathrm{dom}(p) = \mathrm{dom}(q)$ geben, was $p(\nu) = q(\nu)$ bedeutet, aber nach Konstruktion von p und q unmöglich ist. Widerspruch. q.e.d.

Der generische Filter G kann also nur eine der Bedingungen $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ aus der Bemerkung enthalten. Es ist nur mit Kenntnis des Systems g nicht möglich zu entscheiden, welche dieser Bedingungen in G ist.

Im Zusammenhang einer Darstellung von Forcing mit Boole'schen Algebren kann man zeigen, dass zu jedem X aus einer generischen Erweiterung $V[G]$ eine Forcing–Erweiterung $V[G']$ existiert, so dass $V[X] = V[G']$ (siehe [Jec78]). Der Beweis benutzt essentiell das Auswahlaxiom und ist nicht konstruktiv. Es stellt sich folgende

Frage: Lässt sich ein natürliches Teilforcing von $(\mathcal{P}_{GM}, \leq)$ angeben, so dass der generische Filter G aus dem hinzugefügten System g von Prikry–Folgen redefinierbar ist, d.h. für das gilt $V[G] = V[g]$?

Um ein ähnliches Resultat wie Satz 3.5.4 auch für Gitik–Magidor–Forcing zu erhalten, machen wir unser System von Prikry–Folgen unscharf modulo endlicher Anfangsstücke.

Definition 4.6.1 *Sei $\langle U_\nu \mid \nu \in [\kappa,\ \lambda), \lhd\rangle \in V$ ein κ–gerichtetes Rudin–Keisler–System und seien Projektionen $\sigma_{\nu\nu'}$ für $\nu \lhd \nu'$ fest gewählt. Dann heißt $\langle x_\nu \,|\, \nu \in [\kappa,\ \lambda)\rangle$ ein Gitik–Magidor–System für $\langle U_\nu \,|\, \nu \in [\kappa,\ \lambda), \lhd\rangle$ über V, wenn folgende Bedingungen gelten:*

(1) $\forall \nu \in [\kappa,\ \lambda)$ x_ν *ist Prikry–Folge für* U_ν,

(2) $\forall \nu, \nu' \in [\kappa,\ \lambda)$ $\nu \lhd \nu' \to x_\nu \triangle \sigma_{\nu'\nu}[x_{\nu'}]$ *ist endlich,*

(3) $\forall \nu, \nu' \in [\kappa,\ \lambda)$ $\nu \neq \nu' \to x_\nu \cap x_{\nu'}$ *ist endlich.*

Zwei Gitik–Magidor–Systeme x und y heißen äquivalent genau dann, wenn für alle $\nu \in [\kappa,\ \lambda)$ gilt $x_\nu \triangle y_\nu$ ist endlich. Für ein $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$ heißen x und y äquivalent über $\tilde{p}$, wenn x und y äquivalent sind und außerdem gilt $\forall \nu \in \mathrm{dom}(p)$ $p(\nu) \subseteq x_\nu = y_\nu$.

Gitik–Magidor–Systeme modulo endlicher Anfangsstücke wurden zuerst in [Koe99] betrachtet.

Satz 4.6.2 *Es ist $\langle g_\nu \,|\, \nu \in [\kappa,\ \lambda)\rangle$ ein Gitik–Magidor–System über V für das Rudin–Keisler–System $\langle U_\nu \mid \nu \in [\kappa,\ \lambda), \lhd\rangle$ von Ultrafiltern, das dem Gitik–Magidor–Forcing zugrunde lag.*

Beweis: Es wurde schon bemerkt, dass die g_ν Prikry–Folgen zum jeweiligen Ultrafilter U_ν sind. Der Rest des Satzes ist eine Umformulierung von Lemma 4.5.5. q.e.d.

Mit obigen Definitionen können wir Mathias' Resultat (Satz 3.5.4) auf Gitik–Magidor–Forcing verallgemeinern.

Lemma 4.6.3 *Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM}$ eine mit $x = \langle x_\nu \mid \nu \in [\kappa,\ \lambda)\rangle$ kompatible Bedingung und sei $D \subseteq \mathcal{P}_{GM}$ eine offene dichte Menge.*

Dann existieren eine Verstärkung $\tilde{q} \leq \tilde{p}$, $\tilde{q} \in D$, und ein Gitik–Magidor–System y, so dass $\tilde{q}$ kompatibel ist mit $y = \langle y_\nu \mid \nu \in [\kappa,\ \lambda)\rangle$ und y und x äquivalent sind über $\tilde{p}$.

Beweis: Wir wenden die Konstruktion aus dem Beweis von Lemma 4.4.1 simultan für jedes $a \in [\kappa]^{<\omega}_{\ll}$ auf die Bedingung $\tilde{p} \otimes_{\mu_p} a$ an. Sei dazu eine hinreichend gut reflektierende Substruktur $\mathcal{M}$ von V wie dort gewählt und sei $\mu \in [\kappa, \lambda)$ eine $\lhd$–obere Schranke von $[\kappa, \lambda) \cap \mathcal{M}$. Wir erhalten für jedes

$a \in [\kappa]^{<\omega}_{\ll}$ eine Bedingung $\tilde{q}_a = (q_a, Q_a) \leq_d \tilde{p} \otimes_{\mu_p} a$ mit maximaler Koordinate μ, für die gilt

$$\text{Wenn } \tilde{r} \leq \tilde{q}_a \text{ und } \tilde{r} \in D \text{ und } \forall \nu \in \operatorname{dom}(r) \max(r(\mu)) \lessapprox \max(r(\nu)) \text{ gilt,}$$
$$\text{dann gilt } \tilde{q}_a \otimes_\mu r(\mu) \in D.$$

Wir definieren

$$Q := \triangle_{\xi<\kappa} \bigcap_{\max(a)=\xi} Q_a \in U_\mu.$$

Da x ein Gitik–Magidor–System ist, können wir ein Anfangsstück $a \subseteq x_{\mu_p}$ wählen, so dass $x_\mu \setminus (\max(a)+1) \subseteq Q$ ist und $\max(a) \geq \max(\sigma_{\mu\mu_p}[x_\mu] \triangle x_{\mu_p})$.

Sei nun H eine hinreichend gute Struktur in einer Sprache der ersten Stufe, die alle in diesem Beweis auftretenden Mengen als Konstanten enthalte. Sei nach Satz 4.1.5 $I \in U_\mu$ eine Menge von $\ll$–Ununterscheidbaren für H. Da $a \in H$ ist, gilt insbesondere $\min(I) \gg \max(a)$. Wir wählen ein Anfangsstück $b \subseteq x_\mu$, so dass

$$x_\mu \setminus b \subseteq I \cap Q$$

ist.

Jetzt benutzen wir die Dichtheit von D, um ein $\tilde{r} = (r, R) \leq (q_a, Q \cap I) \otimes_\mu b$ zu finden. O.B.d.A. gelte auch $\forall \nu \in \operatorname{dom}(r) \max(r(\mu)) \lessapprox \max(r(\nu))$, sonst gehen wir zu einer geeigneten Reflektionserweiterung über. Dann gilt

$$\tilde{r} = (r, R) \leq (q_a, Q \cap I) \otimes b \leq_r (q_a, Q \cap I) \leq_d (q_a, Q_a) = \tilde{q}_a.$$

Nach Wahl von $\tilde{q}_a$ gilt $\tilde{q}_a \otimes_\mu r(\mu) \in D$. Die Konstruktion aus 4.4.1 ergibt $q_a(\mu) = \emptyset$, weshalb $b \subseteq r(\mu)$ ein Anfangsstück ist. Ferner ist $r(\mu) \setminus b \subseteq I$, etwa mit Länge n und wir betrachten das Anfangsstück $c \subseteq x_\mu \setminus b \subseteq I$ der selben Länge n. Wegen der Ununterscheidbarkeit der Elemente von I gilt:

$$\tilde{q} := (q_a, I \cap Q) \otimes_\mu (b \frown c) \in D.$$

Es bleibt zu zeigen dass $\tilde{q}$ kompatibel mit einem Gitik–Magidor–System y ist, das über $\tilde{p}$ äquivalent zu x ist.

Fall 1: $\nu \in \mathrm{dom}(p)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} q(\nu) &= q_a(\nu) \oplus \sigma_{\mu\nu}[b \frown c] \\ &= (p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p\nu}[a]) \oplus \sigma_{\mu\nu}[b \frown c] \\ &= p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p\nu}[a \oplus \sigma_{\mu\mu_p}[b \frown c]] \\ &\subseteq p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p\nu}[a \oplus \sigma_{\mu\mu_p}[x_\mu]] \\ &= p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p\nu}[x_{\mu_p}] \\ &= x_\nu \end{aligned}$$

und wir setzen $y_\nu := x_\nu$. Es folgt

$$\begin{aligned} y_\nu &= p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p\nu}[a \oplus \sigma_{\mu\mu_p}[x_\mu]] \\ &= \underbrace{(p(\nu) \oplus \sigma_{\mu_p\nu}[a])}_{=q_a(\nu)=q(\nu)} \oplus \sigma_{\mu_p\nu}[x_\mu] \\ &= q(\nu) \oplus \sigma_{\mu\nu}[x_\mu] \end{aligned}$$

Fall 2: $\nu \in \mathrm{dom}(q) \setminus \mathrm{dom}(p)$. Dann definieren wir $y_\nu := q(\nu) \oplus \sigma_{\mu\nu}[x_\mu]$.
Fall 3: $\nu \notin \mathrm{dom}(q)$. Wir setzen $y_\nu := x_\nu$.

Dann ist $y := \langle y_\nu \mid \nu \in [\kappa,\ \lambda)\rangle$ offenbar ein Gitik–Magidor–System, da für jedes $\nu \in [\kappa, \lambda)$ die Folge y_ν bis auf ein endliches Anfangsstück mit x_ν übereinstimmt. Aus diesem Grund sind x und y auch äquivalent und nach Fall 1 der Konstruktion sogar äquivalent über $\tilde{p}$.

Dass $\tilde{q}$ kompatibel mit y ist, folgt nun aus

$$x_\mu \setminus q(\mu) = x_\mu \setminus (b \cup c) \subseteq Q \cap I.$$

q.e.d.

Satz 4.6.4 *Sei V ein abzählbares Grundmodell und sei $x = \langle x_\nu \mid \nu \in [\kappa,\ \lambda)\rangle$ ein Gitik–Magidor–System über V für das Rudin–Keisler–System $\langle U_\nu \mid \nu \in [\kappa,\ \lambda), \lhd\rangle \in V$. Dann gibt es einen $\mathcal{P}_{GM}$–generischen Filter G, so dass das von G induzierte Gitik–Magidor–System $g = \langle g_\nu | \nu \in [\kappa,\ \lambda)\rangle$ und x äquivalent sind.*

Beweis: Sei $(\mathcal{P}_{GM}, \leq)$ die Gitik–Magidor–Halbordnung gegeben durch das System $\langle U_\nu \mid \nu \in [\kappa,\ \lambda), \lhd\rangle$.

Sei $\{D_i \mid i < \omega\}$ eine Aufzählung der dichten offenen Mengen in $(\mathcal{P}_{GM})$, die Element von V sind. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $D_0 = \mathcal{P}_{GM}$ ist.

Ausgehend von der trivialen Bedingung $(\emptyset, \kappa) =: \tilde{p}_0$ und $y^0 := x$ iterieren wir die Konstruktion aus dem Beweis des vorhergehenden Lemmas und definieren rekursiv eine in $(\mathcal{P}_{GM}, \leq)$ absteigende Folge $\langle \tilde{p}_i \mid i < \omega \rangle$, so dass für $i < \omega$ die Bedingung $\tilde{p}_i \in D_i$ und $\tilde{p}_i$ kompatibel ist mit einem Gitik–Magidor–System $y^i = \langle y^i_\nu \mid \nu \in [\kappa, \lambda) \rangle$ wie oben konstruiert.

Sei

$$G := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM} \mid \exists n < \omega \ \tilde{p}_n \leq \tilde{p}\}$$

Dann ist G generischer Filter über V und induziert das System $g = \langle g_\nu \mid \nu \in [\kappa, \lambda) \rangle$ mit

$$\begin{aligned} g_\nu : &= \bigcup \{p(\nu) \mid \exists P \ (p, P) \in G \ \wedge \ \nu \in \mathrm{dom}(p)\} \\ &= \bigcup \{p_n(\nu) \mid n < \omega\} \end{aligned}$$

Behauptung: Es sind g und x äquivalent.
Beweis: Es ist für alle $\nu \in [\kappa, \lambda)$ zu zeigen

$$g_\nu \triangle x_\nu \text{ ist endlich.}$$

Sei $\nu \in [\kappa, \lambda)$ und sei $n_\nu < \omega$ minimal, so dass $\nu \in \mathrm{dom}(p_{n_\nu})$. In den zugehörigen Gitik–Magidor–Systemen wird die Folge mit Index ν nur im Schritt n_ν geändert: Für jedes $i < n_\nu$ ist nach Konstruktion $y^i_\nu = x_n$ und für jedes $i \geq n_\nu$ gilt ebenso $y^{n_\nu}_\nu = y^i_\nu = g_\nu$. Nach Lemma 4.6.3 sind y^{n_ν} und $y^{n_\nu - 1}$ äquivalent. q.e.d.

Es liegt nahe, nach einer Verschärfung von Satz 4.6.4 zu suchen derart, dass das von G erzeugte System *gleich* dem gegebenen Gitik–Magidor–System x ist. Eine solche Behauptung wäre jedoch falsch, da das System x i.A. nicht generisch ist. Wir betrachten folgendes
Gegenbeispiel: Sei $x = \langle x_\nu \mid \nu \in [\kappa, \lambda) \rangle$ ein Gitik–Magidor–System über V mit der Eigenschaft

$$x_\nu(1) = 17 \text{ für alle } \nu \in [\kappa, \lambda).$$

Sei G ein $\mathcal{P}_{GM}$–generischer Filter über V, dann trifft G die dichte Menge $D := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_{GM} \mid \exists \nu \in \mathrm{dom}(p) \ p(\nu)(1) \neq 17\}$. Dann gibt es ein $\nu \in [\kappa, \lambda)$, so dass $g_\nu(1) \neq 17$ für das von G erzeugte Gitik–Magidor–System g.

Satz 4.6.4 ist also in diesem Sinne das bestmögliche Resultat.

Kapitel 5

Magidor–Forcing

Magidor–Forcing wurde in [Mag78] eingeführt. Es ist eine Variante von Prikry–Forcing derart, dass die Konfinalität einer messbaren Zahl κ zu einem beliebig vorgegebenen regulären Wert $\alpha < \kappa$ geändert wird. Wiederum bleiben alle Kardinalzahlen erhalten, jedoch werden – im Fall $\alpha > \omega$ – beschränkte Teilmengen von κ addiert.

Neben [Mag78] ist mir keine Darstellung von Magidor–Forcing in der Literatur bekannt. In dieser Arbeit wird das Forcing aus einem kombinatorisch charakterisierten kohärenten System von Ultrafiltern konstruiert. Dadurch wird der Begriff der Mitchell–Ordnung vom Forcing getrennt.

In der Definition der Halbordnung werden auch hier Reflektions– und direkte Erweiterungen betrachtet, so dass ein volles Prikry–Lemma formuliert und bewiesen werden kann. Das verbessert die Darstellung aus [Mag78]. Darüber hinaus wird alternativ eine rekursive Definition von Magidor–Forcing gegeben, die die Selbstähnlichkeit der Halbordnung mit ihren Anfangsstücken betont. Eine kombinatorische Charakterisierung der neu hinzu gefügten Folge und ein Vergleich mit Prikry–Forcing schließen das Kapitel ab.

5.1 Kohärente Systeme von Ultrafiltern

Ausgangspunkt für die Definition von Magidor–Forcing ist ein kohärentes System von Ultrafiltern. Ähnliche Systeme werden z.B. in [Cum93] betrachtet, unsere Definition benennt jedoch alle nötigen Objekte explizit.

Definition 5.1.1 *Seien α und κ Ordinalzahlen, $\alpha < \kappa$. Eine Folge $(\langle U_\beta | \beta < \alpha\rangle, \langle \dot{U}^\beta_\gamma | \gamma < \beta,\ \beta < \alpha\rangle)$ heisst (α, κ)–kohärentes System von Ultrafiltern,* *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *Für alle* $\beta < \alpha$ *ist* U_β *ein* $< \kappa$*–vollständiger normaler Ultrafilter auf* κ*, und für alle* $\beta < \alpha$ *und alle* $\gamma < \beta$ *ist* $\dot{U}^\beta_\gamma$ *eine Funktion mit Definitionsbereich* κ*,*

(2) *für alle* $\gamma, \beta < \alpha$ *mit* $\gamma < \beta$ *gilt*

$$x \in U_\gamma \leftrightarrow \{\xi < \kappa | \xi \cap x \in \dot{U}^\beta_\gamma(\xi)\} \in U_\beta,$$

(3) *für alle* $\beta < \alpha$ *ist*

$$\{\xi < \kappa | (\langle \dot{U}^\beta_\gamma(\xi) | \gamma < \beta \rangle, \langle \dot{U}^\gamma_\delta \restriction \xi | \delta < \gamma,\ \gamma < \beta \rangle) \text{ ist ein } (\xi, \beta)\text{–kohärentes System}\} \in U_\beta.$$

Wir nennen α die Höhe des kohärenten Systems und interessieren uns im folgenden nur für kohärenten Systeme regulärer Höhe. Die Menge aus Bedingung (3) heißt *Reflexionsmenge* für β und wird mit I_β bezeichnet.

5.2 Mitchell–Ordnung auf Folgen von Ultrafiltern

In diesem Abschnitt werden wir ein kohärentes System von Ultrafiltern konstruieren. Dabei gehen wir von einer messbaren Zahl hoher Mitchell–Ordnung aus. Wir sehen diese Ergebnisse als ein Argument für die Existenz eines kohärenten Systems. Unsere Version von Magidor–Forcing basiert direkt auf einem kohärenten System, so dass dieser Abschnitt zum Verständnis der Forcing–Konstruktion nicht nötig ist.

5.2.1 Ultrapotenzen

Ultraprodukte sind in der Modelltheorie eine wichtige Methode zur Konstruktion von Modellen. (siehe [CK90]) Diese Methode kann auf die Mengenlehre übertragen werden und dient zur Konstruktion von Modellen von **ZFC**.

Sei U ein $< \kappa$–vollständiger normaler Ultrafilter auf κ. Wir betrachten

$$V^\kappa = \{f \mid f : \kappa \to V\}$$

und definieren eine Äquivalenzrelation auf V^κ durch

$$f \sim g \text{ genau dann, wenn } \{i < \kappa \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse $\{g : \kappa \to V \mid g \sim f\}$ von f mit $[f]$ und definieren als Träger unseres Ultraprodukts

$$V^\kappa/U := \{[f] \mid f : \kappa \to V\}.$$

Diese Definition ist mengentheoretisch problematisch, denn i.A. ist $[f]$ eine echte Klasse. Wir benutzen Scott's Trick und betrachten statt $[f]$ die Menge der bezüglich der Rangfunktion minimalen Repräsentanten. Der Träger $\mathcal{U}$ wird zu einer Struktur durch die Definitionen

$$([f] \in^* [g]) \leftrightarrow \{i < \kappa \mid f(i) \in g(i)\} \in U.$$

Damit erhalten wir den fundamentalen

Satz 5.2.1 (Satz von Łoš) *Sei φ eine $\in$–Formel und seien $f_1, \dots, f_n$ Funktionen mit Definitionsbereich κ. Dann gilt*

$$V^\kappa/U \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \text{ genau dann, wenn } \{i < \kappa | \varphi(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U.$$

Der Beweis benutzt Induktion über den Formelaufbau und findet sich in Lehrbüchern der Mengenlehre, z.B. [Jec78].

Da U abzählbar abgeschlossen ist, ist die Ultrapotenz fundiert und es existiert nach einem Satz von Mostowski eine Kollabierungsfunktion zu einem transitiven isomorphen Modell, das wir mit $Ult(V, U)$ bezeichnen. Ist $x \in Ult(V, U)$, etwa $x = [f]$, wobei $f \colon \kappa \to V$, dann heißt f repräsentierende Funktion oder Namen für x.

Falls wir mehrere Ultrapotenzen betrachten, indizieren wir die Äquivalenzklassen mit den jeweiligen Ultrafiltern.

Zu Beginn von Abschnitt 3.3 haben wir gesehen, dass jede elementare Einbettung einen normalen Ultrafilter erzeugt. Umgekehrt lässt sich V kanonisch in die Ultrapotenz elementar einbetten vermöge der Projektion $\pi \colon V \to Ult(V, U)$ mit $\pi(x) = [c_x]$, wenn c_x die konstante Funktion mit Wert x ist.

Lemma 5.2.2 *Sei U ein $< \kappa$–vollständiger normaler Ultrafilter auf κ und sei $M := Ult(V, U)$ die Ultrapotenz von V modulo U.*

(1) *Sei* $f : \kappa \to \mathrm{Pot}(\kappa)$ *eine Funktion auf* κ *und sei* $x \subseteq \kappa$. *Wenn für alle* $\xi < \kappa$ *gilt* $f(\xi) = \xi \cap x$, *dann gilt* $x = [f]$.

(2) *Es gilt* $[\mathrm{id}] = \kappa$.

(3) *Es ist* M *abgeschlossen unter Folgen der Länge* κ, *d.h.* ${}^{\kappa}M \subseteq M$.

(4) *In* V *und* M *hat* κ *dieselben Teilmengen, d.h.* $(\mathrm{Pot}(\kappa))^V = (\mathrm{Pot}(\kappa))^{Ult(V,U)}$

Beweis: Zu (1): Die $< \kappa$–Abgeschlossenheit von U impliziert, dass α durch die konstante Funktion c_α mit Wert α repräsentiert wird. Gelte $\alpha \in x \subseteq \kappa$, dann gilt $c_a(\xi) \in x \cap \xi$ für $\xi \in (\alpha, \kappa)$. Das heißt nach Definition von f aber $c_\alpha(\xi) \inf(\xi)$. Wegen der Normalität von U ist auch jedes Endstück von κ im Ultrafilter, also folgt $[c_a] \in [f]$. Die umgekehrte Inklusion folgt analog. (Für die Aussage reicht schon, wenn $f(\xi) = \xi \cap x$ auf einer Menge im Ultrafilter gilt.)

(2) ist ein Sonderfall von (1) mit $x = \kappa$ und $f = \mathrm{id}$.

Zu (3): Sei $\langle a_\xi \,|\, \xi < \kappa\rangle \in {}^{\kappa}M$ und sei für jedes $\xi < \kappa$ eine repräsentierende Funktion g_ξ für a_ξ gewählt.

Die Funktion $F : \kappa \to M$ sei definiert als

$$F(\zeta) := \langle g_\xi(\zeta) \mid \xi < \zeta\rangle.$$

Da $F(\zeta)$ für jedes $\zeta < \kappa$ eine Folge der Länge ζ ist, ist $[F]$ eine Folge der Länge $[\mathrm{id}] = \kappa$.

Behauptung: Für jedes $\xi < \kappa$ gilt $[F](\xi) = a_\xi$.

Beweis: Sei $\xi < \kappa = [\mathrm{id}]$ fest. Es ist $\{\zeta < \kappa \mid \xi < \zeta\}$ als Endstück von κ in jedem normalen Ultrafilter auf κ enthalten und somit gilt $\mathrm{id}(\zeta) > \xi$ für fast alle (im Sinne von U) ζ. Für jedes solche ζ hat $F(\zeta)$ an der Stelle ξ den Wert $g_\xi(\zeta)$. Es bleibt ξ jedoch unverändert, so dass aus $[g_\xi] = a_\xi$ die Behauptung folgt.

Damit sehen wir $[F] = \langle a_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$.

Zu (4): Es gilt $\pi \restriction V_\kappa = \mathrm{id}$, also für alle Teilmengen $x \subseteq \kappa$: $x = \pi(x) \cap \kappa$. Es folgt (4). (Die Normalität von U ist für (3) und (4) nicht notwendig.) q.e.d.

5.2.2 Die Mitchell–Ordnung

Definition 5.2.3 *Seien* U_1 *und* U_2 *normale Ultrafilter auf* κ. *Dann heißt* U_1 *im Sinne der Mitchell–Ordnung kleiner als* U_2, *wenn* $U_1 \in Ult(V, U_2)$. *Wir schreiben dann* $U_1 \prec U_2$.

Der Begriff wurde von Bill Mitchell [Mit74] eingeführt, wo bereits die folgenden Eigenschaften von $\prec$ genannt werden.

Lemma 5.2.4 *Seien U_1 und U_2 normale Ultrafilter auf κ. Gelte $U_1 \prec U_2$. Sei $\dot{U}_1$ ein Name für U_1 in der Ultrapotenz mit U_2, d.h. es gilt $U_1 = [\dot{U}_1]_{U_2}$. Dann gilt*

(1) *Für alle $x \subseteq \kappa$ gilt $x \in U_1$ genau dann, wenn $\{\xi < \kappa | \xi \cap x \in \dot{U}_1(\xi)\} \in U_2$.*

(2) *Es ist $\{\xi < \kappa \mid \dot{U}_1(\xi)$ ist ein normaler Ultrafilter auf $\xi\} \in U_2$.*

Beweis: Zu (1): Sei die Funktion g auf κ gegeben durch $g(\xi) := x \cap \xi$. Dann wird nach Lemma 5.2.2 diese Menge durch g repräsentiert, $x = [g]$ (in beiden Ultrapotenzen). Nun gilt $x \in U_1$ genau dann, wenn $[g]_{U_2} \in [\dot{U}_1]_{U_2}$ und somit genau dann, wenn $g(\xi) \in \dot{U}_1(\xi)$ ist auf einer Menge im Ultrafilter U_2. Nach Definition von g ist dies gleichbedeutend mit $\{\xi < \kappa \mid x \cap \xi \in \dot{U}_1(\xi)\} \in U_2$.

(2) folgt aus dem Satz von Łoš und der Abgeschlossenheit der Ultrapotenz unter Folgen der Länge κ. q.e.d.

Die Relation $U_1 \prec U_2$ ist durch die Aussagen dieses Lemmas charakterisiert, d.h. sind U_1 und U_2 normale Ultrafilter auf κ, dann gilt $U_1 \prec U_2$ bereits, wenn eine Folge $\langle \dot{U}_1(\xi) \mid \xi < \kappa \rangle$ normaler Ultrafilter existiert, die (1) und (2) erfüllt.

Lemma 5.2.5 *Seien U_1, U_2 und U_3 normale Ultrafilter auf κ. Gelte $U_1 \prec U_2 \prec U_3$ und seien $\dot{U}_1$ und $\dot{U}_2$ Namen für U_1 und U_2 in den jeweiligen Ultrapotenzen, d.h. $U_1 = [\dot{U}_1]_{U_2}$, $U_2 = [\dot{U}_2]_{U_3}$. Dann gilt $U_1 \prec U_3$ sowie $Ult(V, U_3) \models U_1 \prec U_2 \ \wedge \ U_1 = [\dot{U}_1]_{U_2}$.*

Beweis: Die Transitivität von $\prec$ folgt aus der Charakterisierung durch (1) und (2) von Lemma 5.2.4, der Rest der Behauptung aus (3) und (4) von Lemma 5.2.2. q.e.d.

Ebenso implizieren (3) und (4) aus Lemma 5.2.2, dass $\prec$ fundiert ist. Also ist $\prec$ eine partielle Wohlordnung. Jeder Ultrafilter kann höchstens 2^κ viele Vorgänger bezüglich $\prec$ haben. Die maximal mögliche Länge einer in der Mitchell–Ordnung aufsteigenden Folge normaler Ultrafilter auf κ ist also $(2^\kappa)^+$. Ist κ etwa 2^κ–superkompakt, so existiert eine solche Folge, siehe [SRK78]. Dies ist mehr als genug für unsere Forcing–Konstruktion. Weitere (mögliche) Eigenschaften von $\prec$ werden von Cummings in [Cum93] behandelt.

5.2.3 Kohärenz und Mitchell–Ordnung

Sei $\alpha < \kappa$ und $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ eine in der Mitchell–Ordnung aufsteigende Folge von normalen Utrafiltern auf κ, d.h. es gilt für alle $\gamma, \beta < \alpha$:

$$\gamma < \beta \rightarrow U_\gamma \prec U_\beta.$$

Zur Konsistenzstärke dieser Annahme siehe obige Bemerkung bzw. direkt [SRK78]. Dann werden nach dem vorangegangenen Abschnitt die Eigenschaften von U_γ von U_β reflektiert. Dies wollen wir ausnutzen, um ein (κ, α)–kohärentes System zu erhalten.

Für alle $\gamma, \beta < \alpha$ mit $\gamma < \beta$ gibt es Namen für den Ultrafilter U_γ in der Ultrapotenz $Ult(V, U_\beta)$. Dies sind Funktionen auf κ und Lemma 5.2.4 (1) besagt, dass Bedingung (2) aus der Definition eines kohärenten Systems (Definition 5.1.1) erfüllt ist.

Zum Nachweis von (3) aus Definition 5.1.1 muss erstens gezeigt werden, dass die Namen $\dot{U}_\gamma^\beta$ auf einer großen Menge (d.h. einer in U_β) Ultrafilter als Werte haben, für die wiederum (2) gilt. Dies folgt aus den eben bewiesenen Lemmata zusammen mit der $< \kappa$–Abgeschlossenheit der Ultrafilter.

Zweitens ist die Kohärenz zu zeigen, dies heißt folgendes: Für $\beta, \gamma, \delta < \alpha$ mit $\delta < \gamma < \beta$, wenn $\dot{U}_\delta^\beta(\xi) \prec \dot{U}_\gamma^\beta(\xi)$ gilt, so gibt es eine Funktion, die $\dot{U}_\delta^\beta(\xi)$ in $Ult(V, U_\gamma^\beta(\xi))$ repräsentiert. Wir müssen zeigen, dass wir (auf einer Menge in U_β) die Einschränkung von $\dot{U}_\delta^\gamma$ auf diesen Wert $\xi < \kappa$ als Namen für den Ultrafilter $\dot{U}_\delta^\beta(\xi)$ aus der Sicht des Modells $Ult(V, \dot{U}_\gamma^\beta(\xi))$ nehmen können. Dies ist die Aussage von

Lemma 5.2.6 *Für jedes $\beta < \alpha$, $\beta \neq 0$ ist*

$$\begin{aligned}\{\xi < \kappa \mid \forall \gamma < \beta \quad \forall \delta < \gamma \quad & \dot{U}_\gamma^\beta(\xi) \textit{ ist ein normaler Ultrafilter auf } \xi \\ \wedge \quad & \dot{U}_\delta^\beta(\xi) \prec \dot{U}_\gamma^\beta(\xi) \\ \wedge \quad & [\dot{U}_\delta^\gamma \restriction \xi]_{\dot{U}_\gamma^\beta(\xi)} = \dot{U}_\delta^\beta(\xi)\} \in U_\beta.\end{aligned}$$

Beweis: Wir führen folgende Konstruktion für jedes $\beta < \alpha$, $\beta \neq 0$ durch: Seien zunächst $\gamma < \beta$ und $\delta < \gamma$ fest. Nach Lemma 5.2.4 ist $A_{\delta,\gamma} := \{\xi < \kappa \mid \dot{U}_\gamma^\beta(\xi)$ ist ein normaler Ultrafilter auf $\xi\} \in U_\beta$. Nach dem Lemma 5.2.5 ist auch $B_{\delta,\gamma} := \{\xi < \kappa \mid \dot{U}_\delta^\beta(\xi) \prec \dot{U}_\gamma^\beta(\xi)\} \in U_\beta$. Die Abgeschlossenheit von U_β zusammen mit $\gamma, \beta < \alpha$ impliziert nun, dass für jedes $\beta < \alpha$ der Schnitt $S_\beta := \bigcap_{\gamma<\beta} \bigcap_{\delta<\gamma} (A_{\delta,\gamma} \cap B_{\delta,\gamma})$ dieser Mengen über alle γ, δ in U_β ist.

Sei nun $\beta < \alpha$, $\beta \neq 0$ fest, dann nehmen wir für einen Widerspruch an, dass die Menge der Behauptung nicht in U_β ist. Dies muss an der dritten Bedingung der Definition dieser Menge liegen und die Abschlusseigenschaften von U_β ergeben wiederum, dass schon $\gamma < \beta$ und $\delta < \gamma$ existieren, so dass gilt

$$C := \{\xi \in S_\beta \mid [\dot{U}_\delta^\gamma \upharpoonright \xi]_{\dot{U}_\gamma^\beta(\xi)} = \dot{U}_\delta^\beta(\xi)\} \notin U_\beta.$$

Andererseits gilt nach Lemma 5.2.4 wegen $U_\gamma \prec U_\beta$ und $S_\gamma \in U_\gamma$:

$$D := \{\xi \in S_\beta \mid \xi \cap S_\gamma \in \dot{U}_\gamma^\beta(\xi)\} \in U_\beta.$$

Aus den Filteraxiomen folgt $D \setminus C \in U_\beta$, sei also $\xi \in D \setminus C$. Nun bedeutet $\xi \in D$, dass $\xi \cap S_\gamma \in \dot{U}_\gamma^\beta(\xi)$ gilt. Für jedes $\zeta \in S_\gamma$ mit $\zeta < \xi$ ist $\dot{U}_\delta^\gamma(\zeta)$ nach Wahl von S_γ ein normaler Ultrafilter auf ζ und aus dem Satz von Łoš folgt

$$[\dot{U}_\delta^\gamma \upharpoonright \xi]_{\dot{U}_\gamma^\beta(\xi)} \text{ ist ein normaler Ultrafilter auf } \xi.$$

Allerdings kann dieser Ultrafilter wegen $\xi \notin C$ nicht mit $\dot{U}_\delta^\beta(\xi)$ (auch ein normaler Ultrafilter!) identisch sein.

Da beide Filter maximal sind, finden wir $E_\xi \subseteq \xi$, so dass

$$E_\xi \in \dot{U}_\delta^\beta(\xi) \setminus [\dot{U}_\delta^\gamma \upharpoonright \xi]_{\dot{U}_\gamma^\beta(\xi)}.$$

Daraus folgt nach 5.2.4 (1):

$$F_\xi := \{\zeta < \xi \mid \zeta \cap E_\xi \notin \dot{U}_\delta^\gamma(\zeta)\} \in \dot{U}_\gamma^\beta(\xi).$$

Nach Lemma 3.1.4 aus Kapitel 3 existieren nun Mengen $E \subseteq \kappa$ und $F \subseteq \kappa$, so dass gilt

$$G := \{\xi < \kappa \mid \xi \cap E = E_\xi \ \wedge\ \xi \cap F = F_\xi\} \in U_\beta$$

und nach 5.2.4 folgt wiederum $E \in U_\delta$ und $F \in U_\gamma$. Andererseits gilt für jedes $\zeta \in F$, dass $\zeta \cap E \notin \dot{U}_\delta^\gamma(\zeta)$ ist. Da aber $\dot{U}_\delta^\gamma$ den Filter U_δ in $Ult(V, U_\gamma)$ repräsentiert, $[\dot{U}_\delta^\gamma]_{U_\gamma} = U_\delta$, gilt $E \notin U_\delta$. Widerspruch. q.e.d.

Satz 5.2.7 *Seien α und κ Kardinalzahlen, $\alpha < \kappa$. Wenn es eine in der Mitchell–Ordnung aufsteigende Folge der Länge α von normalen Ultrafiltern auf κ gibt, so existiert ein (α, κ)–kohärentes System von Ultrafiltern.*

Beweis: Sei $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ ein solche Folge. Seien für $\beta, \gamma < \alpha$ mit $\gamma < \beta$ wie oben repräsentierende Funktionen $\dot{U}^\beta_\gamma : \kappa \to V$ gewählt. Dann sind – wie oben bereits bemerkt – Bedingungen (1) und (2) aus Definition 5.1.1 erfüllt. Für Bedingung (3) wenden wir Lemma 5.2.6 an. Genauer ist dies ein Beweis durch Induktion, denn um zu sehen, dass für ein $\xi < \kappa$ das System $(\langle \dot{U}^\beta_\gamma(\xi) | \gamma < \beta\rangle, \langle \dot{U}^\gamma_\delta \restriction \xi | \delta < \gamma,\ \gamma < \beta\rangle)$ ein (β, ξ)–kohärentes System ist, muss dieselbe Bedingung für dieses System gezeigt werden. Da aber $\xi < \kappa$ und $\beta < \alpha$ ist, sind wir nach endlich vielen Schritten und Anwenden von 5.2.6 fertig. q.e.d.

Umgekehrt bildet die erste Komponente eines (α, κ)–kohärenten Systems eine bzgl. der Mitchell–Ordnung aufsteigende Folge der Länge α von Ultrafiltern auf κ. Ist $\gamma < \beta < \alpha$, so erhält man offenbar $U_\gamma = [\dot{U}^\beta_\gamma]_{U_\beta} \in Ult(V, U_\beta)$.

5.3 Magidor–Forcing

In diesem Abschnitt wird die Magidor–Halbordnung definiert. Unsere Darstellung basiert auf der axiomatischen Definition eines kohärenten Systems von Ultrafiltern und macht so die Verwendung von Ultrapotenzen überflüssig, was viele Beweise aus [Mag78] wesentlich vereinfacht.

Sei von nun an α regulär und ein (α, κ)–kohärentes System $(\langle U_\beta | \beta < \alpha\rangle, \langle \dot{U}^\beta_\gamma | \gamma < \beta,\ \beta < \alpha\rangle)$ von Ultrafiltern festgelegt mit zugehörigen Reflexionsmengen $I_\beta \in U_\beta$ für $\beta < \alpha$.

Definition 5.3.1 *Die Magidor-Bedingungsmenge $\mathcal{P}_M$ wird definiert durch $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ genau dann, wenn $\tilde{p} = (p, P)$ ist und folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) $p\colon \alpha \hookrightarrow \kappa$ *ist aufsteigende partielle Funktion,* $\overline{\overline{p}} < \omega$*, wobei für jedes* $\beta \in \mathrm{dom}(p)$ *gilt* $p(\beta) \in I_\beta$*,*

(2) $P\colon \alpha \setminus \mathrm{dom}(p) \to \mathrm{Pot}(\kappa)$ *mit*

$$P(\beta) \in \begin{cases} U_\beta & \textit{falls } \beta > \max(\mathrm{dom}(p)) \\ \dot{U}^{\beta^\oplus}_\beta(p(\beta^\oplus)) & \textit{falls } \beta^\oplus = \min(\mathrm{dom}(p) \setminus \beta), \end{cases}$$

(3) $\forall \gamma \in \mathrm{dom}(p)\, \forall \beta \notin \mathrm{dom}(p)$

$$((\gamma < \beta \to \alpha < p(\gamma) < \min(P(\beta))) \ \wedge\ P(\beta) \subseteq I_\beta).$$

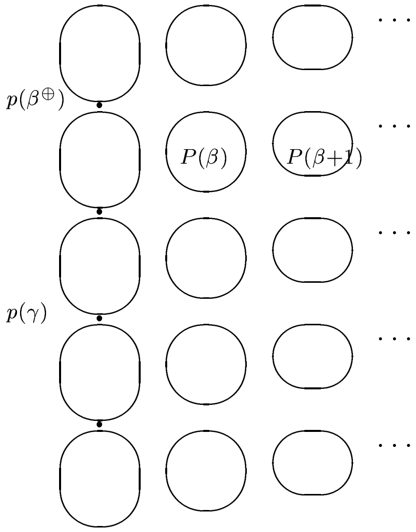

Abbildung 5.1: Eine Magidor–Bedingung $\tilde{p}$

Die jeweils ersten Komponenten stellen endliche Approximationen an die zu gewinnende in κ konfinale Folge mit Definitionsbereich α dar.

Für $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$ stellt $P(\beta)$ die Reservoirmenge für mögliche Erweiterungen von p an der Stelle β dar. Falls $\beta > \max(\mathrm{dom}(p))$ ist, ist diese Menge groß im Sinne des Ultrafilters U_β. Wir bezeichnen die nächstgrößere Ordinalzahl, auf der p bereits definiert ist, mit $\beta^\oplus$. (Im allgemeinen ist $\beta^\oplus$ nicht der kardinale Nachfolger von β.) Nun sollen alle Punkte in $P(\beta)$ kleiner sein als $p(\beta^\oplus)$, um eine aufsteigende Folge zu erhalten, jedoch ist $P(\beta)$ immer noch groß im Sinne des Ultrafilters $\dot{U}_\beta^{\beta^\oplus}(p(\beta^\oplus))$. Dies entspricht dem Bild von U_β aus Sicht des Modells $Ult(V, U_{\beta^\oplus})$ an der bereits festgelegten Stelle $p(\beta^\oplus)$.

Die Forderung $p(\beta) \in I_\beta$ ergibt, dass jedes Anfangsstück $(p \restriction \beta, P \restriction \beta)$, $\beta \in \mathrm{dom}(p)$ einer Magidor–Bedingung wiederum eine solche ist, jedoch zu einem $(\beta, p(\beta))$–kohärenten System, d.h. es wird eine β lange in $p(\beta)$ unbeschränkte Folge hinzugefügt. Diese Selbstähnlichkeit wird für die Kardinalzahlbewahrung entscheidend sein.

Wegen Bedingung (3) spielt sich die gesamte Konstruktion oberhalb von α ab, so dass das Universum bis α unverändert bleibt. Dies wird insbesondere implizieren, dass α in der generischen Erweiterung regulär bleibt. Ferner dient (3) einer einfacheren Darstellung: Gäbe es in $P(\beta)$ Reservoirpunkte kleiner oder gleich $p(\gamma)$ für ein $\gamma \in \mathrm{dom}(p) \cap \beta$, so würden diese nie gewählt und wären überflüssig. Ebenso alle Punkte außerhalb von I_β. Die Konstruktion verläuft ohne Bedingung (3) im wesentlichen genauso, ist mit (3) jedoch leichter lesbar.

Definition 5.3.2 *Auf $\mathcal{P}_M$ wird eine Relation $\tilde{q} \leq_{1r} \tilde{p}$, $\tilde{q}$ ist einfach reflektierende Erweiterung von $\tilde{p}$, definiert durch:*

(1) $q = p \cup \{\langle \beta, \xi \rangle\}$, *wobei* $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$,

(2) $\xi \in P(\beta)$,

(3) $\forall \gamma \in \mathrm{dom}(Q)$

$$Q(\gamma) = \begin{cases} P(\gamma) \setminus (\xi + 1) & \textit{falls } \gamma > \beta \\ P(\gamma) \cap \xi & \textit{falls } \gamma < \beta \end{cases}.$$

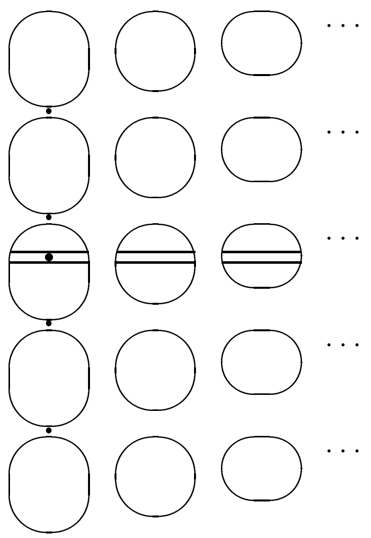

Abbildung 5.2: Eine einfache Reflektionserweiterung $\tilde{q}$

Für einen Abstieg in der partiellen Ordnung wird die erste Komponente vergrößert, indem ein neuer Punkt zur entstehenden Magidor–Folge hinzugefügt wird. Dieser stammt aus der jeweiligen Reservoirmenge. Nach Wahl dieses einen Punktes an der Stelle β spielt die Menge $P(\beta)$ keine Rolle mehr. Die Reservoirmengen werden nur so weit verkleinert, wie durch die Wahl des neuen Punktes erforderlich.

Eine Bedingung $\tilde{q}$ heißt Reflektionserweiterung von $\tilde{p}$, $\tilde{q} \leq_r \tilde{p}$, wenn $\tilde{q}$ durch endlichfache einfach reflektierende Erweiterung aus $\tilde{p}$ entstanden ist.

Eine weitere Ordnung $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$, $\tilde{q}$ ist direkte Erweiterung von $\tilde{p}$, wird definiert durch

(1) $q = p$,

(2) $\forall \beta \notin \mathrm{dom}(q)\ Q(\beta) \subseteq P(\beta)$.

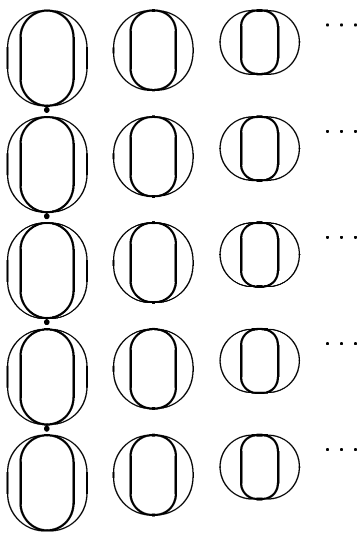

Abbildung 5.3: Eine direkte Erweiterung $\tilde{q}$

Wie bei Prikry– und bei Gitik–Magidor–Forcing werden bei einer direkten Erweiterung nur die Reservoirmengen verkleinert, während die endliche Approximation an die gesuchte neue Folge unverändert bleibt.

Schließlich definieren wir auch für Magidor–Forcing $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ genau dann, wenn es endlich viele Bedingungen $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n \in \mathcal{P}_M$ gibt, so dass $\tilde{p}_1 = \tilde{p}, \tilde{p}_n = \tilde{q}$ und für alle $i < n$ gilt $\tilde{p}_{i+1} \leq_r \tilde{p}_i$ oder $\tilde{p}_{i+1} \leq_d \tilde{p}_i$.

Bemerkung: Die so definierten Relationen $\leq_r, \leq_d, \leq$ sind partielle Ordnungen auf $\mathcal{P}_M$.

Wir führen folgende Schreibweisen ein:

Ist $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ und $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$, so steht $p \otimes \langle \beta, \xi \rangle$ für $p \cup \{\langle \beta, \xi \rangle\}$. Da eine einfach reflektierende Erweiterung $\tilde{q}$ von $\tilde{p}$ durch den gewählten neuen Punkt $\langle \beta, \xi \rangle$ eindeutig bestimmt ist, können wir schreiben $\tilde{p} \otimes \langle \beta, \xi \rangle$. Für endliche $b = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq \alpha$ und $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subseteq \kappa$ bezeichnet $p \otimes \langle b, x \rangle := p \cup \{\langle \beta_1, \xi_1 \rangle, \ldots, \langle \beta_n, \xi_n \rangle\}$. Ist $\tilde{q} = (q, Q)$ Reflektionserweiterung von $\tilde{p} = (p, P)$, so schreiben wir auch $\tilde{q} = \tilde{p} \otimes \{\langle \beta_1, \xi_1 \rangle, \ldots, \langle \beta_n, \xi_n \rangle\}$, wenn die $\langle \beta_i, \xi_i \rangle$ die neu gewählten Punkte sind. Da mehrere einfache Reklektionserweiteungen offenbar miteinander kommutieren, ist diese Schreibweise gerechtfertigt.

Wie bei Prikry– und Gitik–Magidor–Forcing reichen für beliebige Verstärkungen zwei Schritte aus.

Lemma 5.3.3 *Sei $\tilde{q} \leq \tilde{p}$. Dann existiert ein $\tilde{r} \in \mathcal{P}_M$, so dass gilt*

$$\tilde{q} \leq_d \tilde{r} \leq_r \tilde{p}.$$

Beweis: Wir definieren $r := q$ und für jedes $\beta \notin \mathrm{dom}(q)$ bezeichnen wir $\min((\mathrm{dom}(q) \setminus \beta) \cup \{\alpha\})$ mit β^+ und $\max((\mathrm{dom}(q) \cap \beta) \cup \{0\})$ mit β^-. Dann wählen wir $R(\beta) := \{\xi \in P(\beta) \mid q(\beta^-) < \xi < q(\beta^+)\}$, wobei $q(0) := 0$ und $q(\alpha) := \kappa$ gesetzt sei.

Dann ist $R(\beta) \supseteq Q(\beta)$ und es gilt $\tilde{r} = (r, R) \leq_r \tilde{p}$. Eine Folge von einfach reflektierenden Erweiterungen, die dies bezeugt, erhält man, indem man $q \setminus p$ aufsteigend aufzählt und diese Definition von $\tilde{r}$ sukzessiv für die Punkte aus $q \setminus p$ nacheinander durchführt.

Ferner gilt $\tilde{q} \leq_d \tilde{r}$, denn es muss für alle $\beta \in \alpha \setminus \mathrm{dom}(q)$ bereits gelten $Q(\beta) \subseteq P(\beta)$ sowie $Q(\beta) \subseteq q(\beta^+)$ und $Q(\beta) \cap q(\beta^-) = \emptyset$ nach Definition von $\mathcal{P}_M$. q.e.d.

Insbesondere folgt, dass für zwei Magidor–Bedingungen $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ ist genau dann, wenn gilt

$q \supseteq p$,

$\forall \beta \in \mathrm{dom}(q \setminus p)\ q(\beta) \in P(\beta)$,

und $\forall \beta \notin \mathrm{dom}(q)\ Q(\beta) \subseteq P(\beta)$.

Wesentlich im Hinblick auf ein Prikry–Lemma ist es, die Reservoirmengen zu verändern. Folgende Bezeichnungen sind nützlich: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$, eine Menge $A \subseteq \kappa$ heisst *β–Kandidat* für $\tilde{p}$, wenn $A \subseteq P(\beta)$ und A aus dem richtigen Ultrafilter ist, so dass eine Magidor-Bedingung entsteht, wenn $P(\beta)$ durch A ersetzt wird. Formal also $A \in \dot{U}_\beta^{\beta^+}(p(\beta^+))$, wenn $\beta^+ = \min(\mathrm{dom}(p) \setminus \beta)$ ist und $A \in U_\beta$, falls $\beta > \max(\mathrm{dom}(p))$.

Eine Menge $A \subseteq \kappa$ heisst *guter β–Kandidat* für $\tilde{p}$, wenn darüber hinaus gilt: Für alle $\xi \in A$ gibt es eine Erweiterung $\tilde{q}$ von $\tilde{p}$, so dass $q = p \otimes \langle \beta, \xi \rangle$. Gute Kandidaten enthalten also z.B. keine zusätzlichen Punkte, mit denen keine Reflektionserweiterung möglich ist.

Lemma 5.3.4 *Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M, \beta \notin \mathrm{dom}(p)$. Dann gibt es einen guten β–Kandidaten $A \subseteq \kappa$ für $\tilde{p}$.*

Beweis: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ und sei $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$. Falls $\beta < \max(\mathrm{dom}(p))$, so definieren wir $\beta^+ := \min(\mathrm{dom}(p) \setminus \beta)$ und $\beta^- := \max(\{0\} \cup (\mathrm{dom}(p) \cap \beta))$. (In den definierenden Termen ist die Klammerung unerheblich.) Der Fall $\beta > \max(\mathrm{dom}(p))$ verläuft genauso mit etwas weniger Schreibaufwand. (Wenn wir $\tilde{p}$ erweitern durch $p(\alpha) = \kappa$ und für alle $\beta < \alpha$ noch $\dot{U}_\beta^\alpha(\kappa) = U_\beta$ setzen, so ist dieser Fall im anderen enthalten.)

Sei nun $\gamma \in (\beta^-, \beta)$, dann ist $P(\gamma) \in \dot{U}_\gamma^{\beta^+}(p(\beta^+))$. Nach (2) aus der Definition eines kohärenten Systems gilt

$$A_\gamma := \{\xi < p(\beta^+) \mid \xi \cap P(\gamma) \in \dot{U}_\gamma^\beta(\xi)\} \in \dot{U}_\beta^{\beta^+}(p(\beta^+)).$$

Es ist nach Definition von $\mathcal{P}_M$ auch $P(\beta)$ aus diesem Ultrafilter und aufgrund der $< p(\beta^+)$–Abgeschlossenheit dieses Filters gilt

$$A := P(\beta) \cap \bigcap_{\gamma \in (\beta^-, \beta)} A_\gamma \ \in \dot{U}_\beta^{\beta^+}(p(\beta^+)).$$

Behauptung: Diese Menge A leistet das Verlangte.
Beweis: Für $\xi \in A$ definieren wir $p_\xi := p \otimes \langle \beta, \xi \rangle = p \cup \{\langle \beta, \xi \rangle\}$ und für $\gamma \in (\beta^-, \beta^+)$:

$$P_\xi(\gamma) := \begin{cases} P(\gamma) \cap \xi & \text{falls } \gamma < \beta \\ P(\gamma) \setminus (\xi + 1) & \text{falls } \gamma > \beta \end{cases}$$

Für alle anderen $\gamma \notin \mathrm{dom}(p_\xi)$ stimme $P_\xi(\gamma)$ mit $P(\gamma)$ überein. Nach Konstruktion ist $\tilde{p}_\xi := (p_\xi, P_\xi)$ eine Bedingung, denn $\xi \in A_\gamma$ und somit gilt für

$\gamma \in (\beta^-, \beta)$, dass $P_\xi(\gamma) = \xi \cap P(\gamma) \in \dot{U}^\beta_\gamma(\xi)$ ist. Offensichtlich ist $\beta \in \mathrm{dom}(\tilde{p}_\xi)$ für alle $\xi \in A$ und es gilt $\tilde{p}_\xi \leq \tilde{p}$. q.e.d.

Ist $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ und $A \subseteq P(\beta)$ ein guter β–Kandidat für $\tilde{p}$, so schreiben wir für $\xi \in A$ auch

$$\tilde{p}_\xi = \tilde{p} \otimes \langle \beta, \xi \rangle$$

für das $\tilde{p}_\xi$ aus diesem Beweis.

Korollar 5.3.5 *Für jedes $\beta < \alpha$ ist $D_\beta = \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_M \mid \beta \in \mathrm{dom}(p)\}$ dicht in $\mathcal{P}_M$.*

Beweis: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M, \beta \notin \mathrm{dom}(p)$. Wähle zunächst einen guten β–Kandidaten für $\tilde{p}$ und dann eine beliebige einfach reflektierende Erweiterung an der Stelle β. Die so entstandene Bedingung verstärkt $\tilde{p}$ und liegt in D_β. q.e.d.

Lemma 5.3.6 *Für jedes $\xi < \kappa$ ist $D^\xi = \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_M \,|\, \xi < \max(\mathrm{range}(p))\}$ dicht in $\mathcal{P}_M$.*

Beweis: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ und sei $\xi < \kappa$.
FALL 1: $\xi < \max(\mathrm{range}(p))$. Dann liegt $\tilde{p}$ in D^ξ und es ist nichts zu tun.
FALL 2: $\xi \geq \max(\mathrm{range}(p))$. Sei $\beta < \alpha$, $\beta > \max(\mathrm{dom}(p))$, ein solches β existiert immer, weil p endlich und α Limesordinalzahl ist. Wir setzen

$$P'(\gamma) = \begin{cases} P(\gamma) \setminus (\xi + 1) & \text{falls } \gamma \geq \beta \\ P(\gamma) & \text{falls } \gamma < \beta. \end{cases}$$

Dann gilt $(p, P') \leq (p, P)$. Sei nach dem vorangegangenen Lemma $\tilde{q} \leq (p, P')$ gewählt mit $\beta \in \mathrm{dom}(q)$. Dann ist $q(\beta) > \xi$ und es gilt $\tilde{q} \in D^\xi$. q.e.d.

Lemma 5.3.7 *Die Bedingungsmenge $(\mathcal{P}_M, \leq_d)$ ist α–abgeschlossen.*

Beweis: Sei $\langle \tilde{p}_i \mid i < \alpha \rangle \subseteq \mathcal{P}_M$ eine $\leq_d$–absteigende Folge, $\tilde{p}_i = (p, P_i)$. Sei $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$ und sei wie üblich β^+ das nächstgrößere Element in $\mathrm{dom}(p)$. dann gilt für alle $i < \alpha$

$$P_i(\beta) \in \dot{U}^{\beta^+}_\beta(p(\beta^+))$$

und dieser Ultrafilter ist $< p(\beta^+)$–abgeschlossen. Nach (3) aus der Definition von $\mathcal{P}_M$ gilt $\alpha < p(\beta^+)$ und wir können definieren

$$P(\beta) := \bigcap_{i<\alpha} P_i(\beta) \in \dot{U}^{\beta^+}_\beta(p(\beta^+)).$$

Dann ist $\tilde{p} := (p, P)$ eine Magidor–Bedingung. Offensichtlich gilt $\tilde{p} \leq_d \tilde{p}_i$ für alle $i < \alpha$. q.e.d.

Wie der Beweis zeigt, ist $(\mathcal{P}_M, \leq_d)$ i.A. nicht $< \kappa$–abgeschlossen. Mit jeder Reflektionserweiterung müssen neue Ultrafilter auf möglicherweise kleineren Zahlen betrachtet werden. Solange $p(0)$ nicht gewählt ist, ist $\leq_d$ nur $< \min(I_0)$–abgeschlossen.

Da für jedes $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ nur ein endlicher Teil p der zu konstruierenden Magidor–Folge bekannt ist, ist $\mathcal{P}_M$ bezüglich $\leq_r$ nicht ω–abgeschlossen. Daher ist auch $(\mathcal{P}_M, \leq)$ nicht ω–abgeschlossen.

Lemma 5.3.8 *$\mathcal{P}_M$ erfüllt die κ^+–c.c.*

Beweis: Wir beginnen den Beweis mit folgender
BEHAUPTUNG: Je zwei Bedingungen aus $\mathcal{P}_M$ mit gleicher erster Komponente sind kompatibel.
BEWEIS: Seien Bedingungen $\tilde{q} = (q, Q)$ und $\tilde{p} = (p, P)$ gegeben mit $p = q$. Es sind nach Definition von $\mathcal{P}_M$ für alle $\beta \notin \text{dom}(p)$ die Reservoirmengen $P(\beta)$ und $Q(\beta)$ aus jeweils dem selben Ultrafilter. Daher ist für alle solchen β auch $P(\beta) \cap Q(\beta)$ aus diesem Ultrafilter. Wenn wir $R : \text{dom}(P) \to \text{Pot}(\kappa)$ definieren durch $R(\beta) := P(\beta) \cap Q(\beta)$, so ist $(p, R) \in \mathcal{P}_M$. Offensichtlich gilt $r \leq \tilde{p}, \tilde{q}$.

Sei zum Beweis des Lemmas $A = \langle \tilde{p}_i \mid i < \kappa^+ \rangle \subseteq \mathcal{P}_M$ eine Antikette. Nach der Behauptung sind die ersten Komponenten p_i paarweise verschieden. Jedoch gilt $\{p_i \mid i < \kappa^+\} \subseteq [\alpha \times \kappa]^{<\omega}$ und $card([\alpha \times \kappa]^{<\omega}) = \kappa$, also kann A höchstens Kardinalität κ haben. q.e.d.

Der Beweis von Lemma 5.3.7 nutzt nicht aus, dass die Folge $\langle P_i \mid i < \alpha \rangle$ der Reservoirmengen absteigend ist, so dass wir gezeigt haben, dass jeweils α Bedingungen mit gleicher erster Komponente eine gemeinsame Verstärkung haben. Zum Beweis der Antiketten–Bedingung benutzen wir dies nur für zwei derartige Bedingungen.

5.4 Das Prikry–Lemma

Wieder ist der Beweis des Prikry–Lemmas der zentrale Kern der Konstruktion.

Lemma 5.4.1 (Diagonalisierungslemma) *Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$, $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$, $\beta < \alpha$. Sei A guter β–Kandidat für $\tilde{p}$ und sei für jedes $\xi \in A$ eine Bedingung $\tilde{p}_\xi \in \mathcal{P}_M$ gegeben, so dass $\tilde{p}_\xi \leq \tilde{p}$ und $p_\xi = p \otimes \langle \beta, \xi \rangle$. Dann existiert eine direkte Erweiterung $\tilde{q}$ von $\tilde{p}$, so dass gilt*

$$\begin{aligned} &\textit{Für alle } \tilde{r} \in \mathcal{P}_M \textit{ gilt: wenn } \tilde{r} \leq \tilde{q} \textit{ mit } \beta \in \mathrm{dom}(r) \textit{ ist,} \\ &\qquad\qquad \textit{dann existiert ein } \xi \in A, \textit{ so dass } \tilde{r} \leq \tilde{p}_\xi \textit{ gilt.} \end{aligned} \tag{5.1}$$

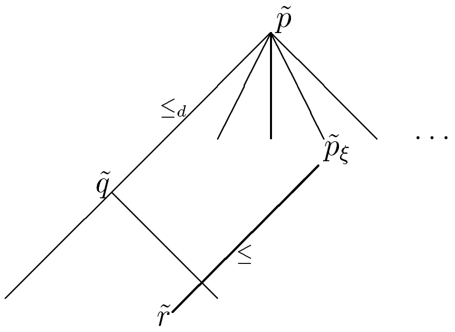

Abbildung 5.4: Das Diagonalisierungslemma

Beweis: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ und $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$. Wie üblich bezeichnen β^+ und β^- die nächstgrößere und die nächstkleinere Ordinalzahl, auf der p bereits definiert ist (bzw. α und 0). Mit diesen Bezeichnungen gilt $A \in \dot{U}_\beta^{\beta^+}(p(\beta^+))$.

Sei nun $\gamma < \beta^-$, $\gamma \notin \mathrm{dom}(p)$. Für alle $\xi \in A$ gilt $P_\xi(\gamma) \subseteq p(\beta^-)$, d.h. für $P_\xi(\gamma)$ existieren höchstens $2^{p(\beta^-)}$ viele mögliche Werte. Da A aus dem normalen Ultrafilter $\dot{U}_\beta^{\beta^+}(p(\beta^+))$ stammt, existiert ein $A_\gamma \subseteq A$ aus diesem Ultrafilter, so dass für alle $\xi \in A_\gamma$ die Mengen $P_\xi(\gamma)$ gleich sind. Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\dot{U}_\beta^{\beta^+}(p(\beta^+))$ ist der Schnitt $A' := \bigcap_{\gamma < \beta^-} A_\gamma$ auch aus diesem Ultrafilter und es gilt für alle $\gamma < \beta^-$, $\gamma \notin \mathrm{dom}(p)$:

$$\forall \xi, \xi' \in A' \; P_\xi(\gamma) = P_{\xi'}(\gamma).$$

Diese Konstante nennen wir Q_γ.

Sei nun $\gamma \in (\beta^-, \beta)$. Für jedes $\xi \in A'$ ist $P_\xi(\gamma) \in \dot{U}^\beta_\gamma(p_\xi(\beta)) = \dot{U}^\beta_\gamma(\xi)$. Insbesondere gilt für alle solchen ξ auch $P_\xi(\gamma) \subseteq \xi$ und wir können dies durch $\xi \mapsto P_\xi(\gamma)$ für $\xi \in A''$ und sonst $\xi \mapsto 0$ zu einer Funktion auf ganz $p(\beta^+)$ fortsetzen. Nach Lemma 3.1.4 existiert nun $B_\gamma \subseteq p(\beta^+)$, so dass gilt

$$C_\gamma := \{\xi \mid B_\gamma \cap \xi = P_\xi(\gamma)\} \in \dot{U}^{\beta^+}_\beta(p(\beta^+)).$$

Da nach Wahl von $\xi \in A' \subseteq I_\beta$ die Folge $(\langle \dot{U}^{\beta^+}_\gamma(p(\beta^+)) \,|\, \gamma < p(\beta^+)\rangle, \langle \dot{U}^\gamma_\delta \restriction p(\beta^+) | \delta < \gamma < \beta^+\rangle)$ ein kohärentes System sein muss, folgt aus $P_\xi(\gamma) \in \dot{U}^\beta_\gamma(\xi)$ nach (2) aus Definition 5.1.1

$$B_\gamma \in \dot{U}^{\beta^+}_\gamma(p(\beta^+)).$$

Wir definieren die Funktion der Reservoirmengen $Q : \alpha \setminus \mathrm{dom}(p) \to \mathrm{Pot}(\kappa)$:

$$Q(\gamma) := \begin{cases} Q_\gamma & \text{für } \gamma < \beta^-, \\ B_\gamma \cap P_\gamma & \text{für } \gamma \in (\beta^-, \beta), \\ P(\beta) \cap A' \cap \bigcap_{\gamma' \in (\beta^-, \beta)} C_{\gamma'} & \text{für } \gamma = \beta, \\ \{\zeta \mid \zeta \in \bigcap_{\xi \in A \cap \zeta} P_\xi(\gamma)\} = \triangle_{\xi \in A} P_\xi(\gamma) & \text{für } \gamma \in (\beta, \beta^+), \\ \bigcap_{\xi \in A} P_\xi(\gamma) & \text{für } \gamma > \beta^+. \end{cases}$$

Sei $q := p$ und $\tilde{q} = (q, Q)$. Dann gelten folgende Behauptungen:

1. $\tilde{q} \in \mathcal{P}_M$ und $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$.

   Beweis: Bedingung (1) aus der Definition von $\mathcal{P}_M$ ist klar, denn es ist $p = q$. Bedingung (3) folgt sofort aus $Q(\gamma) \subseteq P(\gamma)$ für alle $\gamma \notin \mathrm{dom}(p)$. Damit ist auch $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ bewiesen, wenn wir gezeigt haben, dass $\tilde{q}$ eine Magidor–Bedingung ist. Bei der Definition von Q haben wir in den Fällen $\gamma < \beta$ die Reservoirmenge $Q(\gamma)$ gerade so gewählt, dass $Q(\gamma)$ aus dem richtigen Ultrafilter stammt, nämlich aus $\dot{U}^{\beta^+}_\gamma(p(\beta^+))$. Im Fall $\gamma = \beta$ folgt dies nach Wahl von A' zusammen mit der $< p(\beta^+)$–Abgeschlossenheit von $\dot{U}^{\beta^+}_\beta(p(\beta^+))$. Für $\gamma \in (\beta, \beta^+)$ benutzen wir, dass normale Ultrafilter abgeschlossen unter Diagonalschnitten sind und für $c > \beta^+$ die $< p(\beta^+)$–Abgeschlossenheit der Ultrafilter.

2. $\tilde{q}$ erfüllt Aussage (5.1).

   Beweis: Sei eine Magidor–Bedingung $\tilde{r} \leq \tilde{q}$ mit $\beta \in \mathrm{dom}(r)$ gegeben. Dann gibt es ein $\xi \in Q(\beta) \subseteq A' \subseteq A$, so dass $r(\beta) = \xi$. Sofort folgt $r \supseteq q \otimes \langle \beta, \xi \rangle = p_\xi$. Sei weiter $\gamma \in \mathrm{dom}(r) \setminus \mathrm{dom}(p_\xi)$, dann ist $\gamma \in \mathrm{dom}(r) \setminus \mathrm{dom}(q)$ und es folgt $r(\gamma) \in Q(\gamma)$, also auch $r(\gamma) \in P_\xi(\gamma)$. Schließlich gilt für $\gamma \notin \mathrm{dom}(r)$: $R(\gamma) \subseteq Q(\gamma)$ und auch $R(\gamma) \subseteq P_\xi(\gamma)$.

   q.e.d.

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von 5.4.1 auf simultane Erweiterung von p um mehrere Punkte gleichzeitig. Es ist in der Untersuchung von Magidor–Forcing nicht nötig.

Lemma 5.4.2 (mehrfache Diagonalisierung) *Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$, $b \subseteq \alpha$ endlich mit $b \cap \mathrm{dom}(p) = \emptyset$. Für $\beta \in b$ sei A_β ein guter β–Kandidat für $\tilde{p}$ und seien für jedes Paar $\langle \beta, \xi \rangle$ mit $\beta \in b$ und $\xi \in A_\beta$ Bedingungen $\tilde{p}_{\langle \beta, \xi \rangle} \leq_d \tilde{p} \otimes \langle \beta, \xi \rangle \leq \tilde{p}$ gegeben. Dann existiert $\tilde{q} \in \mathcal{P}_M$, $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$, so dass:*

$$\text{Für alle } \tilde{r} \in \mathcal{P}_M,\ \text{wenn } \tilde{r} \leq \tilde{q} \text{ und } b \subseteq \mathrm{dom}(r) \text{ gilt,}$$
$$\text{dann existiert ein } x \in \prod_{\beta \in b} A_\beta, \text{ so dass } \tilde{r} \leq \tilde{p} \otimes \langle b, x \rangle.$$

Beweis: Sei $b = \{\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}\}$ und sei für jedes $i < n$ eine Bedingung $\tilde{q}_i \leq_d \tilde{p}$ nach dem einfachen Diagonalisierungslemma gegeben derart, dass folgendes gilt:

$$\text{Wenn } \tilde{r} \leq \tilde{q}_i \text{ ist und } \beta_i \in \mathrm{dom}(r),$$
$$\text{dann existiert ein } \xi_i \in A_{\beta_i}, \text{ so dass } \tilde{r} \leq \tilde{p} \otimes \langle \beta_i, \xi_i \rangle.$$

Wir definieren eine Bedingung $\tilde{q} = (q, Q)$, wobei $q := p$ sei und für alle $\gamma \notin \mathrm{dom}(p)$ gesetzt wird $Q(\gamma) := Q_0(\gamma) \cap \ldots \cap Q_{n-1}(\gamma)$. Dann sind die $Q(\gamma)$ als endliche Schnitte von Ultrafiltermengen aus dem jeweils richtigen Ultrafilter und es gilt $\tilde{q} \leq_d \tilde{q}_i \leq_d \tilde{p}$ für $i < n$. Sei nun $\tilde{r} \in \mathcal{P}_M$, $\tilde{r} \leq \tilde{q}$ mit $b \subseteq \mathrm{dom}(r)$. Dann gilt für alle $i < n$: $\tilde{r} \leq \tilde{q}_i$, $\beta_i \in \mathrm{dom}(r)$, also existiert eine Zahl $\xi_i \in A_{\beta_i}$ mit $\tilde{r} \leq \tilde{p} \otimes \langle \beta_i, \xi_i \rangle$.
Behauptung: $\tilde{r} \leq \tilde{p} \otimes \langle b, x \rangle$.
Beweis: Es gilt $r \supseteq p \cup \{\langle \beta_0, \xi_0 \rangle, \ldots, \langle \beta_{n-1}, \xi_{n-1} \rangle\}$, ferner gilt für alle $\beta \notin \mathrm{dom}(r)$: $R(\beta) \subseteq Q(\beta) \subseteq Q_i(\beta) \subseteq P(\beta)$ und die gewählten Punkte stammen

aus den jeweils richtigen Reservoirmengen, denn für $\gamma \in \mathrm{dom}(r) \setminus \mathrm{dom}(p) \cup b$ gilt $r(\gamma) \in Q(\gamma) \subseteq Q_i(\gamma)$ für alle $i < n$. q.e.d.

Nun wollen wir mit Hilfe von Induktion das Prikry–Lemma für Magidor–Forcing beweisen. Um die Struktur des Arguments zu illustrieren, beweisen wir zunächst das folgende Lemma, eine schwache Form des Prikry–Lemmas. Da wir die Induktion im darauf folgenden Lemma 5.4.4 bei 0 verankern können, könnten wir hier darauf verzichten. Es ist bedeutend für unsere alternative Definition von Magidor–Forcing, denn da reicht reicht es (wegen Lemma 5.6.4) für das Prikry–Lemma des Produkts.

Lemma 5.4.3 (einfache Erweiterung des Definitionsbereichs) *Sei φ ein Satz der Forcing–Sprache, $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$, $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$. Dann existiert ein $\tilde{q} \in \mathcal{P}_M, \tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ mit*

$$\text{Wenn ein } \tilde{r} \in \mathcal{P}_M \text{ existiert mit } \tilde{r} \leq \tilde{q},\ \tilde{r} \Vdash \varphi \text{ und } r = p \otimes \langle \beta, r(\beta) \rangle, \text{ dann gilt } \tilde{q} \Vdash \varphi. \tag{5.2}$$

Beweis: Sei A ein guter β–Kandidat für $\tilde{p}$, sei für alle $\xi \in A$ die Bedingung $\tilde{p}_\xi \leq \tilde{p}$, so dass $p_\xi = p \otimes \langle \beta, \xi \rangle$. Sei nun ein beliebiges $\xi \in A$ fest.
Fall 1: $\exists \tilde{r} \in \mathcal{P}_M$, so dass gilt $\tilde{r} \leq_d \tilde{p}_\xi$ und $\tilde{r} \Vdash \varphi$.

Sei dann $\tilde{q}_\xi$ eine solche direkte Erweiterung von $\tilde{p}_\xi$.
Fall 2: Nicht Fall 1. Sei dann $\tilde{q}_\xi = \tilde{p}_\xi$.

Wir setzen $A^+ := \{\xi \in A \mid \tilde{q}_\xi \Vdash \varphi\}$ und $A^- := \{\xi \in A \mid \neg \tilde{q}_\xi \Vdash \varphi\}$. Dann gilt $A = A^+ \cup A^-$ und weil A ein β–Kandidat für $\tilde{p}$ war, ist genau eine dieser Mengen im richtigen Ultrafilter $\dot{U}_\beta^{\beta^+}(p(\beta^+))$ und somit β–Kandidat für $\tilde{p}$ (sogar guter β–Kandidat). Sei $\bar{A}$ diese Menge. Wir wenden das Diagonalisierungslemma 5.4.1 auf $\tilde{p}$, $\bar{A}$ und die $\tilde{q}_\xi$ für $\xi \in \bar{A}$ an und erhalten eine direkte Erweiterung $\tilde{q}$ von $\tilde{p}$, so dass Eigenschaft (5.1) gilt.

Wir müssen (5.2) zeigen. Sei dazu $\tilde{r} \leq \tilde{q}$ gegeben, so dass $r = q \otimes \langle \beta, r(\beta) \rangle$ und $\tilde{r} \Vdash \varphi$. Dann existiert ein $\xi \in \bar{A}$, so dass $\tilde{r} \leq \tilde{q}_\xi$. Also gilt nach Wahl von $\tilde{q}_\xi$ bereits $\tilde{q}_\xi \Vdash \varphi$ und nach Definition von $\bar{A}$ sogar $\tilde{q}_\xi \Vdash \varphi$ für alle $\xi \in \bar{A}$.
Behauptung: $\tilde{q} \Vdash \varphi$.
Beweis: Angenommen nicht, dann sei $\tilde{s} \leq \tilde{q}$ eine Bedingung, die $\neg\varphi$ erzwingt. O.B.d.A. ist $\beta \in \mathrm{dom}(s)$ (sonst erweitere $\tilde{s}$ geeignet gemäß Lemma 5.3.5) und es existiert nach (5.1) ein $\xi \in \bar{A}$, so dass $\tilde{s} \leq \tilde{q}_\xi \Vdash \varphi$. Als Verstärkung von $\tilde{q}_\xi$ muss $\tilde{s}$ ebenfalls φ erzwingen. Widerspruch. q.e.d.

Lemma 5.4.4 (Induktionslemma) *Sei φ Satz der Forcing-Sprache, $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$, $a \in [\alpha]^{<\omega}$, $a \cap \operatorname{dom}(p) = \emptyset$. Dann existiert $\tilde{q} \in \mathcal{P}_M$, $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ mit*

$$\text{Wenn } \tilde{r} \in \mathcal{P}_M \text{ existiert, so dass } \tilde{r} \leq \tilde{q},\ \tilde{r} \Vdash \varphi \text{ und } \operatorname{dom}(r) = \operatorname{dom}(p) \cup a, \text{ dann gilt } \tilde{q} \Vdash \varphi. \tag{5.3}$$

Beweis: Induktion über die Länge von a.

Sei $a = \emptyset$. Wenn ein $\tilde{r} \in \mathcal{P}_M, \tilde{r} \leq \tilde{p}$ mit $\tilde{r} \Vdash \varphi$ und $\operatorname{dom}(r) = \operatorname{dom}(p)$ existiert, so heisst das $\tilde{r} \leq_d \tilde{p}$ und dieses $\tilde{r}$ erfüllt 5.3. Wenn kein solches $\tilde{r}$ existiert, so erfüllt bereits $\tilde{p}$ die Behauptung.

Sei $a = \{\beta\}$. Dies ist gerade Lemma 5.4.3.

Sei $a = b \cup \{\beta\}$, $\beta \notin b$. Sei A ein guter β–Kandidat für $\tilde{p}$, sei also für alle $\xi \in A$ die Bedingung $\tilde{p}_\xi = (p_\xi, P_\xi)$ mit der Eigenschaft $p_\xi = p \otimes \langle \beta, \xi \rangle$ eine Verstärkung von $\tilde{p}$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf (p_ξ, P_ξ) und $b \in [\alpha]^{<\omega}$ an und erhalten für jedes $\xi \in A$ ein $\tilde{q}_\xi = (p_\xi, Q_\xi) \leq_d (p_\xi, P_\xi)$ mit 5.3. Insbesondere gilt $q_\xi = p \otimes \langle \beta, \xi \rangle$.

Wir betrachten die Mengen $A^+ := \{\xi \in A \mid \tilde{q}_\xi \Vdash \varphi\}$ und $A^- := \{\xi \in A \mid \neg \tilde{q}_\xi \Vdash \varphi\}$. Dann ist A disjunkte Vereinigung von A^+ und A^- und genau eine dieser Mengen ist aus dem richtigen Ultrafilter $\dot{U}_\beta^{\beta^+}(p(\beta^+))$ und somit guter β–Kandidat für $\tilde{p}$. Diese Menge bezeichnen wir mit $\bar{A}$. Wir wenden nun das Diagonalisierungslemmalemma 5.4.1 auf $\tilde{p}$ und $\bar{A}$ (mit den $\tilde{q}_\xi$) an und erhalten $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$ so dass (5.1) gilt.

Wir zeigen, dass $\tilde{q}$ Aussage (5.3) erfüllt: Sei $\tilde{r} \in \mathcal{P}_M$ mit $\tilde{r} \leq \tilde{q}$, $\tilde{r} \Vdash \varphi$ und $\operatorname{dom}(r) = \operatorname{dom}(p) \cup a$. Dann existiert nach 5.4.1 ein $\xi \in \bar{A}$ mit $\tilde{r} \leq (p \otimes \langle \beta, \xi \rangle, Q_\xi) = (p_\xi, Q_\xi) = \tilde{q}_\xi$. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt $\tilde{q}_\xi$ Eigenschaft (5.3) und es muss $\tilde{q}_\xi \Vdash \varphi$ gelten. Somit ist $\xi \in A^+$, also $\bar{A} = A^+$, d.h. für alle $\xi \in \bar{A}$ gilt $\tilde{q}_\xi \Vdash \varphi$.

Behauptung: $\tilde{q} \Vdash \varphi$.

Beweis: Angenommen nicht, sei $\tilde{s} \in \mathcal{P}_M$, $\tilde{s} \leq \tilde{q}$, so dass $\tilde{s} \Vdash \neg\varphi$. Wir können annehmen, dass $\beta \in \operatorname{dom}(s)$ gilt (sonst erweitere $\tilde{s}$ geeignet). Jedoch existiert nach 5.1 ein $\xi \in \bar{A}$ mit $\tilde{s} \leq (p_\xi, Q_\xi) = \tilde{q}_\xi \Vdash \varphi$ und es folgt $\tilde{s} \Vdash \varphi$. Widerspruch. q.e.d.

Satz 5.4.5 (Prikry–Lemma) *Sei φ ein Satz der Forcing-Sprache, $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$. Dann existiert eine direkte Erweiterung $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$, die φ entscheidet. Wir schreiben wieder $\tilde{q} \parallel \varphi$ für $\tilde{q} \Vdash \varphi \vee \tilde{q} \Vdash \varphi$.*

Beweis: Seien eine Magidor–Bedingung $\tilde{p}$ und φ gegeben. Sei für jedes $a \in [\alpha]^{<\omega}$ nach dem Induktionslemma 5.4.4 eine Bedingung $\tilde{q}_a \in \mathcal{P}_M$, $\tilde{q}_a \leq_d \tilde{p}$

gewählt, so dass 5.3 gilt. Wir definieren $q := p$ und für $\beta < \alpha$ die Reservoirmenge

$$Q(\beta) := \bigcap_{a \in [\alpha]^{<\omega}} Q_a(\beta).$$

Für jedes $a \in [\alpha]^{<\omega}$ ist $Q_\alpha(\beta)$ aus einem normalen Ultrafilter auf $p(\beta^+)$, wobei wie üblich $\beta^+ := \min(\{\alpha\} \cup \mathrm{dom}(p) \setminus \beta)$ sei. Dieser Ultrafilter ist $< p(\beta^+)$–abgeschlossen, so dass wegen $card([\alpha]^{<\omega}) = \alpha$ auch $Q(\beta)$ im jeweils richtigen Ultrafilter ist. Folglich ist $\tilde{q}$ Verstärkung von $\tilde{q}_a$ für alle a.
Behauptung: $\tilde{q} \parallel \varphi$.
Beweis: Angenommen, es gilt nicht $\tilde{q} \Vdash \neg\varphi$. Sei nun $\tilde{r} \leq \tilde{q}$, $\tilde{r} \Vdash \varphi$. Dann ist $a := \mathrm{dom}(r) \setminus \mathrm{dom}(p) \in [\alpha]^{<\omega}$ und wegen $\tilde{r} \leq \tilde{q} \leq \tilde{q}_a$ muss nach 5.3 bereits $\tilde{q}_a \Vdash \varphi$ gelten. Das heißt aber $\tilde{q} \Vdash \varphi$, denn $\tilde{q} \leq \tilde{q}_a$. q.e.d.

5.5 Die Magidor–Erweiterung

Dass die Konfinalität von κ durch Magidor–Forcing geändert wird, folgt sehr kanonisch und analog zur entsprechenden Aussage über die Prikry–Erweiterung. Für die Kardinalzahlbewahrung reicht die α–Abgeschlossenheit nicht aus, eine genauere Analyse der Forcing–Halbordnung ist notwendig.

Satz 5.5.1 *Sei $G \subseteq \mathcal{P}_M$ generischer Filter über dem Grundmodell V. Dann gilt*

(1) *Es ist $x := \bigcup\{p \mid \exists P\ (p, P) \in G\} \colon \alpha \to \kappa$ konfinal in κ.*

(2) *Es gilt $(V_{\alpha+1})^V = (V_{\alpha+1})^{V[G]}$.*

(3) *Es gilt $(cof(\kappa) = \alpha)^{V[G]}$.*

Beweis: Zu (1): Da die Elemente von G kompatibel sind, ist x Funktion. Da alle partiellen Funktionen p aufsteigend sind, muss x monoton steigen. Nach Lemma 5.3.5 hat x Definitionsbereich α. Schliesslich ist nach Lemma 5.3.6 der Wertebereich von x unbeschränkt in κ.

Zu (2): Dies folgt mit dem Prikry–Lemma aus Lemma 5.3.7 analog der entsprechenden Aussage über Gitik–Magidor–Forcing: Sei $x \in V[G]$, $x \subseteq \alpha$ eine Teilmenge von α in der Forcing–Erweiterung und sei $\dot{x} \in V$ ein Name für x, so dass $\dot{x}_G = x$ gilt. Sei nach dem Forcing–Theorem $\tilde{p} \in G$ eine Bedingung, die dies erzwingt, $\tilde{p} \Vdash \dot{x} \subseteq \alpha$. Dann können wir rekursiv eine

Folge $\langle \tilde{p}_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle$ von direkten Erweiterungen von $\tilde{p}$ konstruieren, so dass $\tilde{p}_\beta$ die Aussage $\beta \in \dot{x}$ entscheidet. Dabei benutzen wir im Nachfolgerschritt das Prikry-Lemma und im Limesfall die α–Abgeschlossenheit von $\mathcal{P}_M$. Dabei würde für $(V_\alpha)^V = (V_\alpha)^{V[G]}$ auch $< \alpha$–Abgeschlossenheit von $\mathcal{P}_M$ reichen.

Zu (3): Die Ungleichung $\leq$ folgt sofort aus (1). Für $\geq$ benutzen wir analog zum Beweis von (2) die α–Abgeschlossenheit von $(\mathcal{P}_M, \leq_d)$. q.e.d.

5.5.1 Analyse des Magidor–Forcing

Die Magidor–Bedingungsmenge $\mathcal{P}_M$ ist unter $\leq_d$ nicht $< \kappa$–abgeschlossen, daher können wir nicht wie bei Prikry–Forcing zeigen, dass keine beschränkten Mengen von κ addiert werden.[1] Vielmehr hängen die Abschlusseigenschaften von $(\mathcal{P}_M, \leq_d)$ von der Abgeschlossenheit der Ultrafilter ab, aus denen die Reservoirmengen stammen. Wenn wir zu einer Erweiterung übergehen, in der die erste Komponente verändert wurde, müssen wir neue Ultrafilter betrachten, die i.A. schlechter abgeschlossen sind. Um dies zu umgehen, zerlegen wir die Magidor–Bedingungen wie folgt: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ und sei $\beta < \alpha$. Wir definieren

$$\begin{array}{rcl} \tilde{p}_{\leq\beta} & := & (p \restriction \beta + 1,\ P \restriction \beta + 1) \\ \tilde{p}_{>\beta} & := & (p \setminus (p \restriction \beta + 1),\ P \setminus (P \restriction \beta + 1)) \end{array}$$

Definition 5.5.2 *Betrachte für $\beta < \alpha$ und $\xi < \kappa$ folgende Teilordnungen des Magidor–Forcing:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_{\beta \in \mathrm{dom}(p)} & := & \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_M \mid \beta \in \mathrm{dom}(p)\} \\ \mathcal{P}_{\langle \beta, \xi \rangle} & := & \{\tilde{p} \mid \tilde{p} \in \mathcal{P}_M, p(\beta) = \xi\} \\ \mathcal{P}_{\leq \langle \beta, \xi \rangle} & := & \{\tilde{p}_{\leq\beta} \mid \tilde{p} \in \mathcal{P}_{\langle \beta, \xi \rangle}\} \\ \mathcal{P}_{> \langle \beta, \xi \rangle} & := & \{\tilde{p}_{>\beta} \mid \tilde{p} \in \mathcal{P}_{\langle \beta, \xi \rangle}\} \end{array}$$

mit den natürlichen Ordnungen: $\tilde{q}' \leq \tilde{p}'$ genau dann, wenn $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathcal{P}_M$ existieren mit $\tilde{q} \leq \tilde{p}$, so dass $\tilde{q}_{\leq\beta} = \tilde{q}'$ und $\tilde{p}_{\leq\beta} = \tilde{p}'$ für $\mathcal{P}_{\leq\langle\beta,\xi\rangle}$. Für $\mathcal{P}_{>\langle\beta,\xi\rangle}$

---

[1] Dies ist keine Schwäche der Konstruktion, sondern notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei ein **ZFC**–Grundmodell gegeben, so dass unterhalb von κ einschließlich κ für alle regulären Zahlen ξ gelte $2^\xi = \xi^{++}$ und für alle singulären Kardinalzahlen λ sei $2^\lambda = \lambda^+$. Dieses Verhalten der Kontinuumsfunktion ist möglich [Eas70]. Würden wir nun κ singulär machen mit überabzählbarer Konfinalität ohne beschränkte Teilmengen von κ zu addieren, so wäre Silvers Singular Cardinal Theorem [Sil74] verletzt.

definieren wir $\leq$ analog. In derselben Weise wird $\leq_d$ auf diesen Teilordnungen definiert.

Aus diesen Definitionen folgt sofort:

(1) $\mathcal{P}_{\beta \in \mathrm{dom}(p)}$ ist disjunkte Vereinigung aller Halbordnungen $\mathcal{P}_{\langle \beta,\xi\rangle}$ für $\xi < \kappa$.

(2) Es ist $\mathcal{P}_{\langle \beta,\xi\rangle} \simeq \mathcal{P}_{\leq\langle \beta,\xi\rangle} \times \mathcal{P}_{>\langle \beta,\xi\rangle}$.

Haben wir eine Bedingung $\tilde{p}$ gewählt mit $\beta \in \mathrm{dom}(p)$, so können wir uns $\mathcal{P}_M$ an der Stelle $\langle \beta, \xi\rangle$ eingeschnürt denken und uns im weiteren auf die Untersuchung von $\tilde{p}_{\leq\beta}$ und $\tilde{p}_{>\beta}$ als Elemente der Halbordnungen $\mathcal{P}_{\leq\langle \beta,\xi\rangle}$ und $\mathcal{P}_{>\langle \beta,\xi\rangle}$ beschränken. Wir zeigen als nächstes, dass sich der obere Teil $\mathcal{P}_{>\langle \beta,\xi\rangle}$ genauso verhält wie das gesamte Magidor–Forcing, wir aber zusätzlich die Abgeschlossenheit bzgl. $\leq_d$ abschätzen können.

Lemma 5.5.3 *Sei $\beta < \alpha$ und sei $\xi < \kappa$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *$\mathcal{P}_{>\langle \beta,\xi\rangle}$ erfüllt das Prikry–Lemma.*

(2) *$\left(\mathcal{P}_{>\langle \beta,\xi\rangle}, \leq_d\right)$ ist $< \xi^+$–abgeschlossen.*

Beweis: Zu (1): Es sind α und κ als Kardinalzahlen zu jedem ihrer jeweiligen Endstücke isomorph, also insbesondere zu $[\beta,\alpha)$ bzw. $[\xi,\kappa)$. Wir können also den Beweis des Prikry–Lemmas für $\mathcal{P}_M$ übernehmen, indem wir einerseits jedes $\gamma \in \mathrm{dom}(p)$ und jedes $\gamma \in \mathrm{dom}(P)$ ersetzen durch $\beta + \gamma < \alpha$ und andererseits jedes $\zeta \in \mathrm{range}(p)$ ersetzen durch $\xi + \zeta$. Ebenso können wir die Reservoirmengen $P(\gamma)$ um ξ verschieben.

Zu (2): Alle Ultrafilter, die für $\mathcal{P}_{>\langle \beta,\xi\rangle}$ relevant sind, sind Ultrafilter auf Kardinalzahlen $\geq \xi^+$, die mindestens $< \xi^+$–abgeschlossen sind. Für die direkten Erweiterungen spielen nur die Abschlusseigenschaften dieser Ultrafilter eine Rolle.

Genauer sei $\langle \tilde{p}_i \mid i < \xi\rangle$ eine bezüglich $\leq_d$ absteigende Folge in $\mathcal{P}_{\leq\langle \beta,\xi\rangle}$. Insbesondere gilt $p_i = p_j$ für alle $i, j < \xi$. Setze für $\gamma \notin \mathrm{dom}(p)$:

$$Q(\gamma) := \bigcap P_i(\gamma).$$

Dann ist $\tilde{q} := (p, Q)$ eine Magidor–Bedingung, da die Ultrafilter, aus denen die Reservoirmengen stammen, alle $< \xi^+$-abgeschlossen sind und somit für jedes $\gamma \in (\beta, \alpha)$ die Reservoirmenge $Q(\gamma)$ ebenfalls aus dem richtigen Ultrafilter stammt. Offensichtlich gilt $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}_i$ für alle $i < \xi$. q.e.d.

Vom unteren Faktor wollen wir zeigen, dass er klein ist und Forcing mit $(\mathcal{P}_{\leq\langle\beta,\xi\rangle}, \leq)$ den oberen Teil des Universums im Wesentlichen unverändert lässt.

Lemma 5.5.4 *Die Halbordnung* $(\mathcal{P}_{\leq\langle\beta,\xi\rangle}, \leq)$ *erfüllt die* ξ^+*–c.c.*

Beweis: Analog zu Lemma 5.3.8: Inkompatible Bedingungen müssen sich in ihrer ersten Koordinate unterscheiden, dafür existieren aber nur höchstens $card(\xi^{<\omega}) = \xi$ viele Möglichkeiten. q.e.d.

Die Faktoren, in die wir die Halbordnung $\mathcal{P}_M$ zerlegt haben, sind der ursprünglichen Halbordnung ähnlich in dem Sinne, dass $\mathcal{P}_{\leq\langle\beta,\xi\rangle}$ Definition 5.3.1 erfüllt mit β an Stelle von α und ξ an der von κ. Der obere Faktor $\mathcal{P}_{>\langle\beta,\xi\rangle}$ entspricht der Definition von $\mathcal{P}_M$, wobei jeweils ein Anfangsstück β von α und ξ von κ übergangen wird.

Hier erkennt man sofort, dass Magidor–Forcing neue beschränkte Teilmengen von κ hinzufügt, nämlich eine in ξ konfinale Folge der Länge β, wenn $\beta < \alpha$ Limeszahl ist und ein $\tilde{p} = (p, P)$ mit $\langle\beta, \xi\rangle \in p$ im generischen Filter liegt.

5.5.2 Kardinalzahlbewahrung

Lemma 5.5.5 *Sei G ein $\mathcal{P}_M$–generischer Filter über dem Grundmodell V. Sei $\tilde{p} \in G$, $\beta < \alpha$, so dass $\beta \in \mathrm{dom}(p)$ mit $p(\beta) = \xi$.*

(1) $G_{\leq\beta} := \{\tilde{p}_{\leq\beta} \mid \tilde{p} \in G\}$ *ist generisch für* $\mathcal{P}_{\leq\langle\beta,\xi\rangle}$ *über* V.

(2) $G_{>\beta} := \{\tilde{p}_{>\beta} \mid \tilde{p} \in G\}$ *ist generisch für* $\mathcal{P}_{>\langle\beta,\xi\rangle}$ *über* V.

(3) *Es gilt* $(V_\xi)^V = (V_\xi)^{V[G_{>\beta}]}$

Beweis: Zu (1) und (2): Die Forcinghalbordnung $\mathcal{P}_{\beta\in\mathrm{dom}(p)}$ liegt nach Lemma 5.3.5 dicht in $\mathcal{P}_M$. Also ist $G \cap \mathcal{P}_{\langle\beta,\xi\rangle}$ nach dem Satz über dichte Einbettungen und der ersten Bemerkung nach Definition 5.5.2 generisch für $\mathcal{P}_{\langle\beta,\xi\rangle}$. Nun folgen Behauptungen (1) und (2) wegen $\mathcal{P}_{\langle\beta,\xi\rangle} \simeq \mathcal{P}_{\leq\langle\beta,\xi\rangle} \times \mathcal{P}_{>\langle\beta,\xi\rangle}$ aus dem Produktlemma für Forcing.

Behauptung (3) folgt aus Lemma 5.5.3 mit dem selben Argument wie Lemma 5.5.1. q.e.d.

Lemma 5.5.6 *Sei $G \subseteq \mathcal{P}_M$ ein generischer Filter über V und $\beta < \alpha$. Dann gilt $V[G_{>\beta}] = V[G_{>\beta+1}]$ (mit den Definitionen wie im vorhergehenden Lemma).*

Beweis: Die Inklusion $\supseteq$ ist klar. Die umgekehrte Inklusion folgt daraus, dass die Elemente von $G_{>\beta}$ sich nur um jeweils einen Punkt $\langle \beta, \xi \rangle$ für ein geeignetes ξ bzw. um eine Reservoirmenge, die bereits im Grundmodell ist, von den Elementen in $G_{>\beta+1}$ unterscheiden. Es sind **ZFC**–Modelle jedoch gegen endliche Manipulationen abgeschlossen. q.e.d.

Satz 5.5.7 *Forcing mit $\mathcal{P}_M$ bewahrt Kardinalitäten.*

Beweis: Kardinalzahlen $> \kappa$ bleiben aufgrund der κ^+–c.c. (Lemma 5.3.8) von $\mathcal{P}_M$ erhalten.

Sei nun $G \subseteq \mathcal{P}_M$ generisch über dem Grundmodell V und sei $\lambda = \min(\mathrm{Card}^V \setminus \mathrm{Card}^{V[G]})$ die kleinste kollabierte Kardinalzahl. Wir verallgemeinern ein Argument von 3.4.2, um zu zeigen, dass λ Nachfolgerkardinalzahl ist: Wäre λ Limeskardinalzahl in V, so gäbe es in $V[G]$ eine Bijektion auf ein $\mu < \mu^+ < \lambda$, $\mu, \mu^+ \in \mathrm{Card}^V$, aber $\mu^+ \notin \mathrm{Card}^{V[G]}$ und λ kann nicht minimal gewesen sein.

Also ist $\lambda < \kappa$ Nachfolgerkardinalzahl in V und folglich ist $\lambda \notin \mathrm{range}(p)$ für alle Bedingungen $\tilde{p}$. Sei $\tilde{p} \in G$ mit $\beta, \beta+1 \in \mathrm{dom}(p)$ so, dass $p(\beta) < \lambda < p(\beta+1)$. Solches $\tilde{p}$ und β existieren, da eine in κ konfinale Folge hinzugefügt wird. Sei nun $a \in V[G]$, $a \subseteq \lambda$ so, dass a die Kollabierungsfunktion $f \subseteq \lambda \times \lambda$ kodiert, etwa vermöge der kanonischen Paarbildungsfunktion.

Dann gilt $a \in V[G] = V[G_{\leq\beta+1}][G_{>\beta+1}]$ nach dem Produktlemma. Nach Lemma 5.5.5, (3) kann a als beschränkte Teilmenge von $p(\beta+1)$ nicht durch erweitern mit $G_{>\beta+1}$ hinzugefügt worden sein, d.h. $a \in V[G_{\leq\beta+1}]$. Damit ist $a \in V[G_{\leq\beta}]$ denn diese Modelle sind nach 5.5.6 gleich. Also wurde λ bereits in $V[G_{\leq\beta}]$ kollabiert. Dies ist aber ein Widerspruch zur $p(\beta)$–c.c. von $\mathcal{P}_{\leq\langle\beta,p(\beta)\rangle}$, denn $p(\beta) < \lambda$. q.e.d.

Wir fassen die bisherigen Resultate dieses Kapitels zusammen in

Korollar 5.5.8 *Magidor–Forcing kollabiert keine Kardinalzahlen und es gilt $cof(\kappa) = \alpha$ in der generischen Erweiterung. Insbesondere bleibt α regulär.*

5.6 Rekursiv definiertes Magidor–Forcing

Unser Vorgehen war die Definition und Untersuchung der gesamten Magidor–Halbordnung $\mathcal{P}_M$, die dann in zwei Faktoren aufgespalten wurde, die wiederum Magidor–Forcings waren.

In diesem Abschnitt wird eine alternative Definition von Magidor–Forcing gegeben, die die Produktstruktur offensichtlich macht. Schließlich wird die Äquivalenz zum klassischen Magidor–Forcing bewiesen.

Wir behalten das kohärente System aus Definition 5.1.1 mit allen Bezeichnungen und den Reflexionsmengen I_b als Voraussetzung bei.

Definition 5.6.1 *Rekursiv für jedes $\beta < \alpha$ und jedes $\lambda < \kappa$ definieren wir die (β, λ)–Magidor–Halbordnung $\mathcal{P}_M(\beta, \lambda)$ wie folgt: Es sei $\mathcal{P}_M(0, \xi)$ für jedes $\xi < \kappa$ die triviale Forcing–Halbordnung, die nur aus einem Element besteht. Wir definieren $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M(\beta, \lambda)$ genau dann, wenn $\tilde{p}$ ein Tripel $(p, P, \tilde{p}^{(1)})$ ist, so dass folgende Bedingungen gelten:*

(1) *Es existieren Ordinalzahlen $\beta_p < \beta$ und $\lambda_p < \lambda$, so dass $\lambda_p \in I_{\beta_p} \cup \{0\}$ gilt und darüber hinaus $\tilde{p}^{(1)}$ eine (β_p, λ_p)–Magidor–Bedingung ist.*

(2) *p ist die einelementige Funktion $\{\langle \beta_p, \lambda_p \rangle\}$.*

(3) *P ist eine Funktion $P : \beta \setminus \beta_p \to \mathrm{Pot}((\lambda_p, \lambda))$, so dass für alle γ gilt: $P(\gamma) \in \dot{U}^{\beta}_{\gamma}(\lambda)$ und $P(\gamma) \subseteq I_\gamma$.*

Wir bezeichnen $\tilde{p}^{(1)}$ als *erstes Redukt* von $\tilde{p}$ und definieren rekursiv das *$n+1$–te Redukt* $\tilde{p}^{(n+1)}$ von $\tilde{p}$ als das erste Redukt von $\tilde{p}^{(n)}$. Rekursiv definieren wir die $\mathrm{Spur}(\tilde{p})$ als $\mathrm{Spur}(\tilde{p}^{(1)}) \cup \{\beta_p\}$ und die $\mathrm{Bildspur}(\tilde{p})$ als $\mathrm{Bildspur}(\tilde{p}^{(1)}) \cup \{\lambda_p\}$.

Eine (α, κ)–Magidor–Bedingung entspricht einer Magidor–Bedingung im Sinne der vorangegangenen Abschnitte. Explizit werden nur der oberste Punkt der endlichen Approximation an die Magidor–Folge und die darüber liegenden Reservoirmengen erwähnt, alles andere ist implizit im Redukt $\tilde{p}^{(1)}$ und in den weiteren Redukten enthalten. Die natürliche Abbildung $\mathrm{Spur}(\tilde{p}) \to \mathrm{Bildspur}(\tilde{p})$ gibt die bereits festgelegten Punkte der entstehenden Magidor–Folge an.

Als nächstes definieren wir direkte und reflektierende Erweiterungen.

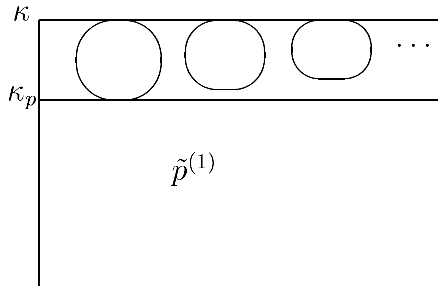

Abbildung 5.5: Eine rekursive Magidor–Bedingung $\tilde{p}$

Definition 5.6.2 *Sei $\beta < \alpha$ und $\lambda < k$ und für alle $\beta' < \beta$ und alle $\lambda' < \lambda$ sei die Relation $\leq_d \subseteq \mathcal{P}_M(\beta', \lambda')^2$ (direkte Erweiterung) bereits definiert. Ebenso sei auf $\mathcal{P}_M(\beta', \lambda')$ eine einfach reflektierende Erweiterung definiert.*

Eine (β, λ)–Magidor–Bedingung $\tilde{q}$ heißt direkte Erweiterung *von $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M(\beta, \lambda)$, formal $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *$\beta_p = \beta_q$ und $\lambda_p = \lambda_q$ sowie $\tilde{q}^{(1)} \leq_d \tilde{p}^{(1)}$,*

(2) *für alle $\beta' \in (\beta_p, \beta)$ gilt $Q(\beta') \subseteq P(\beta')$.*

Eine (β, λ)–Magidor–Bedingung $\tilde{q}$ heißt einfach reflektierende *Erweiterung von $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M(\beta, \lambda)$, wir schreiben $\tilde{q} \leq_{1r} \tilde{p}$, wenn <u>entweder</u> folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *$\beta_p = \beta_{q^{(1)}} < \beta_q$, $\lambda_p = \lambda_{q^{(1)}} < \lambda_q$ und $\tilde{q}^{(1)} = (q^{(1)}, Q^{(1)}, \tilde{q}^{(2)})$ erfüllt $\tilde{q}^{(2)} = \tilde{p}^{(1)}$,*

(2) *für alle $\gamma \in (\beta_q, \beta)$ gilt $Q(\gamma) = P(\gamma) \setminus (\lambda_q + 1)$ und für alle $\gamma \in (\beta_p, \beta_q)$ gilt $Q^{(1)}(\gamma) = P(\gamma) \cap \lambda_q$.*

<u>oder</u> wenn $\beta_p = \beta_q$, $\lambda_p = \lambda_q$ sowie $Q(\gamma) = P(\gamma)$ für alle $\gamma \in (\beta_p, \beta)$ gilt und $\tilde{q}^{(1)}$ eine einfach reflektierende Erweiterung von $\tilde{p}^{(1)}$ ist.

Es heißt $\tilde{q}$ Reflektionserweiterung von $\tilde{p}$, wenn es ein endliches $n < \omega$ und für $i < n$ Bedingungen $\tilde{p}_i \in \mathcal{P}_M(\beta, \lambda)$ gibt, so dass $\tilde{p}_0 = \tilde{p}$, $\tilde{p}_n = \tilde{q}$ und für alle $i < n$ gilt $\tilde{p}_{i+1} \leq_{1r} \tilde{p}_i$.

Schliesslich definieren wir wie üblich $\tilde{q} \leq \tilde{p}$, *genau dann, wenn es ein endliches* $n < \omega$ *und für* $i < n$ *Bedingungen* $\tilde{p}_i \in \mathcal{P}_M(\beta, \lambda)$ *gibt, so dass* $\tilde{p}_0 = \tilde{p}$, $\tilde{p}_n = \tilde{q}$ *und für alle* $i < n$ *gilt:* $\tilde{p}_{i+1}$ *ist direkte oder Reflektionserweiterung von* $\tilde{p}_i$.

Um die Äquivalenz dieser Halbordnung mit Magidor–Forcing (wie in den früheren Abschnitten dises Kapitels) zu zeigen, müssen wir einen Ordnungsisomorphismus $\pi : \mathcal{P}_M(\alpha, \kappa) \to \mathcal{P}_M$ angeben. ($\mathcal{P}_M$ ist die klassische Magidor–Bedingungsmenge aus den vorhergehenden Abschnitten.) Für $\tilde{p} = (p, P, \tilde{p}^{(1)}) \in \mathcal{P}_M(\alpha, \kappa)$ definieren wir die kanonische Projektion

$$\pi : \tilde{p} \mapsto (\langle (\beta^{(n)}, \lambda^{(n)}) \mid n < \ell n(\mathrm{Spur}(\tilde{p})) \rangle, \bigcup_{n < \ell n(\mathrm{Spur}(\tilde{p}))} P^{(n)}).$$

Wir zeigen:

Satz 5.6.3 *Das so definierte* π *ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen* $\mathcal{P}_M(\alpha, \kappa)$ *und* $\mathcal{P}_M$.

Beweis: Da die Ordinalzahlen fundiert sind, sind Spur($\tilde{p}$) und Bildspur($\tilde{p}$) endlich, mit $\lambda_p \in I_{\beta_p}$ ergibt sich (1) aus Definition 5.3.1. Die Reservoirmengen sind offensichtlich aus den richtigen Ultrafiltern und (3) aus 5.3.1 folgt aus den Forderungen $\alpha < \lambda_p$ sowie $P(\gamma) \subseteq (\lambda_p, \lambda)$ für $\gamma \in (\beta_p, \beta)$. Also bildet π in $\mathcal{P}_M$ ab.

Seien $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathcal{P}_M(\alpha, \kappa)$ und sei $\tilde{q} < \tilde{p}$ (echt kleiner). Es reicht, $\pi(\tilde{q}) < \pi(\tilde{p})$ für die beiden Basistypen von Erweiterungen zu zeigen.
FALL 1: $\tilde{q} <_d \tilde{p}$. Dann bleiben Spur und Bildspur unverändert, also auch die dadurch induzierte Abbildung. Ferner werden die Reservoirmengen verkleinert, also $\pi(\tilde{q}) <_d \pi(\tilde{p})$.
FALL 2: $\tilde{q} <_{1r} \tilde{p}$. Dann ist die Abbildung Spur($\tilde{q}$) $\to$ Bildspur($\tilde{q}$) eine Erweiterung von Spur($\tilde{p}$) $\to$ Bildspur($\tilde{p}$) um einen zusätzlichen Punkt $\langle \beta_{p^{(n)}}, \lambda_{p^{(n)}} \rangle$, die Reservoirmengen werden genau an dieser Stelle $\lambda_{p^{(n)}}$ abgeschnitten. Es folgt $\pi(\tilde{q}) <_{1r} \pi(\tilde{p})$.

Es bleibt die Surjektivität von π zu zeigen. Sei also $\tilde{q} = (q, Q) \in \mathcal{P}_M$, sei dom($q$) absteigend aufgezählt als $\beta_1, \ldots, \beta_n$, ebenso sei auch range(q) $= \{\lambda_n, \ldots, \lambda_1\}$ umgekehrt aufsteigend nummeriert. (Eine einheitliche Schreibweise erhalten wir durch $\beta_0 := \alpha$ und $\lambda_0 := \kappa$.) Wir beginnen mit der
BEHAUPTUNG: Es ist $(\{(0,0)\}, P \restriction \beta_n, \emptyset)$ eine (β_n, λ_n)–Magidor–Bedingung.

Beweis: Nach Definition sind die Reservoirmengen aus dem jeweils richtigen Ultrafilter $\dot{U}_\gamma^{\beta_n}(\lambda_n)$. Sonst ist nichts zu zeigen.

Analog definieren wir rekursiv für jedes $i < n = \overline{\overline{\mathrm{dom}(q)}}$, eine $(\beta_{i-1}, \lambda_{i-1})$–Magidor–Bedingung $\tilde{p}^{(i)}$ durch $(\langle \beta_i, \lambda_i \rangle, P \restriction (\beta_i, \beta_{i-1}), \tilde{p}^{(i+1)})$. Auf diese Weise erhalten wir ein $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M(\alpha, \kappa)$, für das nach Definition gilt $\pi(\tilde{p}) = \tilde{q}$. q.e.d.

Die hier gegebene neue Darstellung von Magidor–Forcing betont den Produktcharakter der Halbordnung und ihre Selbstähnlichkeit. Insbesondere wird unmittelbar klar, dass nicht nur die Konfinalität von κ geändert wird, sondern dass in der Erweiterung alle Limesstellen in der Bildspur von $\tilde{p}$ (die im Grundmodell messbar waren) kleine Konfinalität haben.

Das Prikry–Lemma und alle Resultate aus den vorangegangenen Abschnitten lassen sich auch direkt für das rekursiv definierte Magidor–Forcing beweisen. Dabei wird insbesondere der Beweis des Prikry–Lemmas wesentlich vereinfacht, weil wir das Induktionslemma 5.4.4 nicht ganz benötigen, sondern nur den Induktionsanfang 5.4.3. Dies ist möglich aufgrund des folgenden Produkt–Prikry–Lemmas, das zeigt, dass Hauptteil und Redukte einer Bedingung nur wenig interferieren.

Lemma 5.6.4 *Sei κ eine Kardinalzahl und seien $(\mathcal{P}_1, \leq^1, \leq^1_d)$, $(\mathcal{P}_2, \leq^1 \leq^1_d) \in V$ zwei Forcing–Halbordnungen mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Forcing mit $\mathcal{P}_1$ fügt keine neuen Teilmengen von κ hinzu.*
2. *Die Halbordnung $\mathcal{P}_2$ ist enthalten in V_κ und absolut zwischen Modellen, zwischen denen V_κ absolut ist.*
3. *$\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ erfüllen beide das Prikry–Lemma in jedem* **ZFC***–Modell.*

Dann erfüllt das Produkt $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ das Prikry–Lemma.

Beweis: Sei ein Satz φ in der Forcing-Sprache über dem Grundmodell M gegeben.

Betrachte das Produkt $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ mit der Ordnung $(q_1, q_2) \leq_d (p_1, p_2)$ genau dann, wenn $q_1 \leq^1_d p_1$ und $q_2 \leq^2_d p_2$ und der analog definierten Ordnung $\leq$. Dies ist die gewöhnliche Produktordnung. Sei nun $G \subseteq \mathcal{P}$ ein generischer Filter über M, dann ist $G = G_1 \times G_2$ für zwei $\mathcal{P}_1$– bzw. $\mathcal{P}_2$– generische Filter G_1 und G_2, wobei G_2 für $\mathcal{P}_2$ generisch ist über $M[G_1]$. Dies ist das Produktlemma für Forcing wie in [Kun80], [Jec78].

Sei $p \in \mathcal{P}$ und nehme o.B.d.A an, dass $M[G_1 \times G_2] \models \varphi$. Gesucht ist eine direkte Erweiterung q von p, so dass $q \Vdash \varphi$. Wegen $M[G_1 \times G_2] \models \varphi$ existiert nach dem Forcing-Theorem ein $r = (r_1, r_2) \in G_1 \times G_2$ mit $r \Vdash \varphi$. Dies heißt aber

$$r_1 \Vdash_1 \ (r_2 \Vdash_2 \varphi)^{M[\dot{G}_1]}$$

(Genauer müsste hier $\check{r_2}, \check{\Vdash}_2, \check{\varphi}$ stehen, aber als Elemente des Grundmodells M werden diese kanonischen Namen in $M[G_1]$ als $r_2, \Vdash_2, \varphi$ interpretiert und hängen insbesondere nicht von r_1 ab.) Da $\mathcal{P}_1$ das Prikry–Lemma erfüllt, existiert ein $q_1 \leq_d^1 p_1$ mit $q_1 \Vdash (r_2 \Vdash \varphi)^{M[\dot{G}_1]}$.

Die Eigenschaft, dass $\mathcal{P}_2$ das Prikry-Lemma erfüllt, läßt sich ausdrücken als

$$\psi \equiv \ \forall p_2 \in \mathcal{P}_2 \exists q_2 \leq_d p_2 \, (q_2 \parallel \varphi).$$

Es gilt $\mathcal{P}_2 \subseteq V_\kappa$ und Forcing mit $\mathcal{P}_1$ fügt keine Teilmengen von κ hinzu, d.h. $(V_{\kappa+1})^M = (V_{\kappa+1})^{M[G_1]}$, also ist $\mathcal{P}_2$ M–$M[G_1]$–absolut und Forcing mit $\mathcal{P}_2$ erfüllt das Prikry–Lemma. Sei also $q_2 \leq_d^2 p_2$ mit $(q_2 \Vdash_2 \varphi)^{M[G_1]}$. Es folgt $(q_1, q_2) \Vdash \varphi$ und $(q_1, q_2) \leq_d (p_1, p_2)$. q.e.d.

Bedingungen (1) und (2) sind notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt: Seien U_1 und U_2 normale Ultrafilter auf derselben Zahl κ. Wir betrachten das Produkt $(\mathcal{P}, \leq, \leq_d)$ der zugehörigen Prikry–Forcings $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Das Produkt ist bzgl. direkter Erweiterung $< \kappa$–abgeschlossen, addiert jedoch neue Teilmengen von ω, denn es ist für jedes $r \subseteq \omega$ die Menge

$$D_r := \{p \in \mathcal{P} \mid \{n < \omega \mid p_1(n) \neq p_2(n)\} \nsubseteq r\}$$

dicht in $\mathcal{P}$.

5.7 Magidor–Folgen

In diesem Abschnitt wird die neu hinzugefügte Folge x aus Satz 5.5.1 genauer untersucht. Zunächst wird gezeigt, dass der generische Filter $G \subseteq \mathcal{P}_M$, der x induziert hat, aus x redefinierbar ist. Diese Folge wird kombinatorisch charakterisiert. Bisher scheint keine derartige Charakterisierung veröffentlicht zu sein. Ein Vergleich mit Prikry–Forcing schließt das Kapitel über Magidor–Forcing ab.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass κ in der generischen Erweiterung $V[G]$ abzählbare Konfinalität erhält. Ganz analog zu Prikry–Forcing erhalten wir

Lemma 5.7.1 *Sei $\mathcal{P}_M(\omega)$ das Magidor–Forcing mit $\alpha = \omega$ für das α in der Definition von $\mathcal{P}_M$. Sei x die in Satz 5.5.1 definierte neue in κ konfinale Folge. Dann lässt sich der generische Filter G aus x definieren.*

Beweis: Wir definieren

$$G_x := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_M(\omega) \mid p \subseteq x \ \wedge \ \forall n \notin \mathrm{dom}(p)\ x_n \in P(n)\}.$$

Behauptung: $G_x = G$.
Beweis: $\supseteq$: Sei $\tilde{p} \in G$. Dann gilt $p \subseteq x$ und sei $n \notin \mathrm{dom}(p)$, dann existiert ein $\tilde{q} = (q, Q) \in G$, so dass $n \in \mathrm{dom}(q)$ und $q(n) = x_n$. Sei nun $\tilde{r}$ eine gemeinsame Verstärkung von $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$, dann gilt $r \supseteq q$, also $r(n) = q(n) = x_n$ und wegen $\tilde{r} \leq \tilde{p}$ folgt mit Lemma 5.3.3 $r(n) \in P(n)$. Also $\tilde{p} \in G_x$.

$\subseteq$: Seien $\tilde{p}, \tilde{q} \in G_x$. Für eine gemeinsame Verstärkung dieser Bedingungen setzen wir $n_0 := \max(\mathrm{dom}(p) \cup \mathrm{dom}(q))$ und definieren $r := x \upharpoonright (n_0 + 1)$ sowie $R(n) := P(n) \cap Q(n)$ für jedes $n > n_0$. Dann gilt $R(n) \in U_n$ für jedes $n \in \omega \setminus \mathrm{dom}(r)$, also ist $\tilde{r} \in \mathcal{P}_M(\omega)$. Aus $x \supseteq r \supseteq p \cup q$ folgt mit der Eigenschaft $x_n \in P(n)$ (für alle $n \notin \mathrm{dom}(p) \cap n_0$), dass $\tilde{r}$ eine Verstärkung von $\tilde{p}$ ist. Ebenso folgt $\tilde{r} \leq \tilde{q}$ und $\tilde{r} \in G_x$.

Also ist G_x Filter und der Beweis verläuft ab hier völlig analog zum Beweis von 3.5.1. q.e.d.

Die Ähnlichkeit der Situation im Fall $\alpha = \omega$ zu Prikry–Forcing würde noch deutlicher werden, wenn wir einen lückenlosen Definitionsbereich, d.h. $\mathrm{dom}(p) = n$ für ein $n < \omega$ fordern würden. Soll die Folge x größeren Ordnungstyp erhalten, lässt sich G nicht so einfach wieder gewinnen.

Um pathologische Gegenbeispiele ausschließen zu können, definieren wir: Eine Magidor–Bedingung $\tilde{p}$ (für beliebiges reguläres α) heißt *gut*, wenn für alle $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$ die Reservoirmenge $P(\beta)$ ein guter β–Kandidat für $\tilde{p}$ ist.

Lemma 5.7.2 *Die Menge der guten Bedingungen liegt dicht in $\mathcal{P}_M$. Es gilt sogar: Zu jedem $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ existiert eine gute direkte Erweiterung $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$.*

Beweis: Wir beweisen mit Induktion über alle $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$ die
Behauptung: Für jedes $\beta < \alpha$ existiert eine direkte Erweiterung $\tilde{q}_\beta$ von $\tilde{p}$, so dass für alle $\gamma \in \mathrm{dom}(Q) \cap (\beta + 1)$ die Reservoirmenge $Q(\gamma)$ ein guter γ–Kandidat für $\tilde{q}_\beta$ ist und die Funktion Q der Reservoirmengen an allen größeren Stellen mit P übereinstimmt.

Beweis: Im Fall $\beta = 0$ bzw. $\beta = \min(\mathrm{dom}(P))$ liefert uns Lemma 5.3.4 eine Reservoirmenge A, so dass wir $Q_\beta(\beta) := A$ wählen und sonst P beibehalten können. Ebenso verfahren wir im Nachfolgerschritt $\beta + 1$ und erhalten eine Bedingung $\tilde{q}_{\beta+1}$, so dass $Q(\beta + 1)$ ein guter $\beta + 1$–Kandidat für $\tilde{q}_\beta$ ist. Da in die Definition eines guten γ–Kandidaten nur Reservoirmengen unterhalb von γ eingehen (siehe Beweis von 5.3.4), sind alle Mengen $Q_{\beta+1}(\gamma)$ auch gute γ–Kandidaten für $\tilde{q}_{\beta+1}$. Da nur die Reservoirmengen verkleinert werden, gilt $\tilde{q}_{\beta+1} \leq_d \tilde{q}_\beta$.

Im Limesschritt definieren wir zunächst eine direkte Erweiterung $\tilde{r}_\beta \in \mathcal{P}_M$, indem $r := p$ und für $\gamma < \beta$ das Reservoir $R(\gamma) := Q_\gamma(\gamma)$ gesetzt wird. An größeren Stellen stimme R mit P überein. (Eine geschlossene Definition ist mit $R(\gamma) = \bigcap_{\gamma' < \beta} Q_{\gamma'}(\gamma)$ möglich.) Dann liefert wiederum Lemma 5.3.4 einen β–Kandidaten A (für $\tilde{r}$), so dass wir R nur an der Stelle β zu A verkleinern müssen, um $\tilde{q}_\beta$ zu erhalten. Wiederum sind alle $Q_\beta(\gamma)$ für $\gamma \leq \beta$ gute γ–Kandiaten für $\tilde{q}_\beta$.

Zum Beweis des Lemmas konstruieren wir eine Bedingung $\tilde{q} \leq_d \tilde{q}_\beta$ ($\beta < \alpha$) wie zu Beginn des Limesschritts. Dann ist $\tilde{q}$ gut, da die Eigenschaft, guter Kandidat zu sein, wieder erhalten bleibt. Offensichtlich ist $\tilde{q} \leq_d \tilde{p}$. q.e.d.

Um den generischen Filter G aus der induzierten Folge $x : \alpha \to \kappa$ definieren zu können, bieten sich zwei Wege an:

Wir könnten zum einen zu dem Teilforcing von $\mathcal{P}_M$ übergehen, das nur aus guten Bedingungen besteht. Da dieses Forcing dicht in $\mathcal{P}_M$ liegt, erzeugt es die gleichen Erweiterungen des Grundmodells wie $\mathcal{P}_M$. (In jedem Schritt der Konstruktion müssten zusätzlich die Reservoirmengen verkleinert werden, so dass eine gute Bedingung entstünde.) Das Redefinieren des generischen Filters ginge dann genau so wie oben im Fall $\alpha = \omega$.

Zum anderen zeigt das letzte Lemma ja, dass pathologische Bedingungen von einem generischen Filter getroffen werden. Wir erhalten

Satz 5.7.3 *Sei $G \subseteq \mathcal{P}_M$ ein generischer Filter über dem Grundmodell V und $x := \bigcup\{p \mid \exists P\ (p, P) \in G\}$. Dann gilt*

$$V[x] = V[G].$$

Beweis: Klar ist $V[x] \subseteq V[G]$ nach Definition von x mit Hilfe von G. Für die umgekehrte Inklusion definieren wir

$$G_x := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_M \mid \exists \tilde{q} \in \mathcal{P}_M,\ \tilde{q} \leq \tilde{p},\ \tilde{q} \text{ gut},\ q \subseteq x,\ \forall \beta \notin \mathrm{dom}(q)\ x_\beta \in Q(\beta)\}.$$

Wir gehen entsprechend dem Beweis von 3.5.1 vor.
BEHAUPTUNG: $G_x = G$.
BEWEIS: Sei $\tilde{p} \in G$. Da G generisch ist, können wir nach obigem Lemma 5.7.2 o.B.d.A. annehmen, dass $\tilde{p}$ gut ist. Klar ist $p \subseteq x$. Sei $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$ und sei $\tilde{q} \in G$ Verstärkung von $\tilde{p}$ mit $\beta \in \mathrm{dom}(q)$. Dann gilt $x_\beta = q(\beta) \in P(\beta)$ und $G \subseteq G_x$ ist bewiesen.

Wir behaupten, dass je zwei Bedingungen $\tilde{p}, \tilde{q} \in G_x$ eine gemeinsame Verstärkung haben. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ gut sind. (Sonst gehen wir zu geeigneten guten Erweiterungen über.) Klar ist

$$r := p \cup q \subseteq x \text{ und}$$

$$x_\beta \in P(\beta) \cap Q(\beta) =: R(\beta)$$

für alle $\beta \notin \mathrm{dom}(p \cup q)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{r} = (r, R)$ eine Bedingung ist: Sei etwa $\beta \in \mathrm{dom}(p) \setminus \mathrm{dom}(q)$. Da $Q(\beta)$ guter β–Kandidat für $\tilde{q}$ ist, ist für jedes $\gamma < \beta$ (für das kein $\gamma' \in (\gamma, \beta) \cap \mathrm{dom}(p \cup q)$ existiert,) die Menge $Q(\gamma) \cap x_\beta$ im richtigen Ultrafilter $\dot{U}^\beta_\gamma(x_\beta)$. Der Fall $\beta \in \mathrm{dom}(q) \setminus \mathrm{dom}(p)$ geht analog.

Nun folgt $G_x \subseteq G$ wieder wie in Satz 3.5.1. q.e.d.

Wir kehren zum Sonderfall $\alpha = \omega$ zurück, d.h. es wird eine neue Folge mit Ordnungstyp ω, konfinal in κ, erzeugt. Dieser Fall ist in jedem (längeren) Magidor–Forcing als Anfangsstück enthalten. Nicht nur der Ordnungstyp, sondern auch die direkte Redefinierbarkeit des generischen Filters (Lemma 5.7.1) legen die Vermutung nah, dass die Folge $x = \langle x_n \mid n < \omega \rangle$ Prikry–generisch über dem Grundmodell ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, da jeder Ultrafilter aus dem Grundmodell dicht vermieden wird.

Lemma 5.7.4 *Sei $G \subseteq \mathcal{P}_M(\omega)$ generischer Filter über V und x die induzierte Folge. Dann ist x nicht Prikry–generisch über V.*

Beweis: Sei $U \in V$ ein normaler Ultrafilter auf κ. Wir zeigen, dass x nicht Prikry–Folge für U ist. Es ist U o.B.d.A. von allen Ultrafiltern U_n, aus denen $\mathcal{P}_M(\omega)$ definiert wurde, verschieden. (Sonst lassen wir diesen und alle Filter mit kleinerem Index weg.)

Seien für jedes $n < \omega$ Mengen

$$X_n \in U_n \setminus U \text{ und } Y_n \in U \setminus U_n$$

gegeben. Solche Mengen existieren wegen der Maximalität der Filter. Sei

$$D_U := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_M(\omega) \mid \forall n \notin \mathrm{dom}(p)\ P(n) \subseteq X_n \setminus Y_n\}.$$

BEHAUPTUNG: D_U ist dicht in $\mathcal{P}_M(\omega)$.
BEWEIS: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M(\omega)$. Durch endlichfache Anwendung von Lemma 5.3.5 für alle $n < \max(\mathrm{dom}(p))$ erzeugen wir eine Verstärkung von $\tilde{p}$ mit lückenlosem Definitionsbereich $\mathrm{dom}(q) = \max(\mathrm{dom}(p))+1$. Für alle $n > \max(\mathrm{dom}(q))$ wird $Q(n) = P(n) \cap (X_n \setminus Y_n)$ gesetzt. Dann ist $\tilde{q} = (q, Q)$ Verstärkung von $\tilde{p}$ in D_U.

Sei also $\tilde{p} \in G \cap D_U$. Dann gilt für jede Erweiterung $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ und jedes $n \in \mathrm{dom}(q) \setminus \mathrm{dom}(p)$

$$q(n) \in X_n \setminus Y_n.$$

Da $x_n = q(n)$ für jedes $\tilde{q} \in G$ mit $n \in \mathrm{dom}(q)$ gelten muss, gilt für jedes $n > \max(\mathrm{dom}(p))$

$$x_n \notin Y_n.$$

Da U gegen abzählbare Schnitte abgeschlossen ist, gilt $Y := \bigcap_{n<\omega} Y_n \in U$ und Y trifft kein Endstück von x, $\langle x_n \mid n > \max(\mathrm{dom}(p))\rangle \cap Y = \emptyset$, also ist x nicht Prikry–generisch für U. q.e.d.

Wir suchen nun nach einer kombinatorischen Charakterisierung der neu gewonnenen Folge:

Lemma 5.7.5 *Sei α regulärer Limes und $\mathcal{U} = (\langle U_\beta \mid \beta < \alpha\rangle, \langle \dot{U}^\beta_\gamma \mid \gamma < \beta, \beta < \alpha\rangle)$ ein (α,κ)–kohärentes System. Die Folge x aus Satz 5.5.1 hat folgende Eigenschaften:*

(1) *$x \subseteq \kappa$, $otp(x) = \alpha$ und für alle $\lambda < \alpha$, $Lim(\lambda)$ hat $x \restriction \lambda$ entsprechende Eigenschaften für $\langle \dot{U}^\beta_\gamma \restriction \lambda \mid \gamma < \beta < \lambda\rangle$.*

(2) *Für alle Folgen $\vec{X} = \langle X_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ im Grundmodell gilt*

$$card(\{\beta \mid X_\beta \notin U_\beta\}) < \alpha \longleftrightarrow card(\{\beta \mid x_\beta \notin X_\beta\}) < \alpha.$$

(3) *Für alle Folgen $\vec{X} = \langle X_\beta | \beta < \alpha\rangle$, so dass $\forall \beta < \alpha\ X_\beta \in U_\beta$ und $X_\beta \subseteq I_\beta$, im Grundmodell gilt:*

$$\textit{Wenn } \forall \beta' > \beta\ \forall \xi \in X_{\beta'}\ X_\beta \cap \xi \in \dot{U}^{\beta'}_\beta(\xi),$$
$$\textit{dann ist } \{\beta \mid x_\beta \notin X_\beta\} \textit{ endlich.}$$

Die Voraussetzung über die Folge $\vec{X}$ in (3) besagt gerade, dass die Bedingung $(\emptyset, \vec{X})$ gut ist. ($I_\beta \in U_\beta$ ist wieder die Reflexionsmenge aus Definition 5.1.1.)

Beweis: (1) wurde in Abschnitt 5.5 gezeigt.

Zu (2): $\rightarrow$: Sei $\langle X_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ eine Folge von Teilmengen von κ, so dass $F := \{\beta \mid X_\beta \notin U_\beta\}$ kleinere Mächtigkeit als α hat. Sei

$$D := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_M \mid \exists\gamma < \alpha\ \forall\beta \in (\gamma, \alpha)\ P(\beta) \subseteq X_\beta\}$$

Behauptung: D ist dicht in $\mathcal{P}_M$.
Beweis: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$ und sei $\gamma := \sup(\mathrm{dom}(p) \cup F) + 1 < \alpha$. (Hier benutzen wir die Regularität von α.) Für $\beta > \gamma$ definieren wir $Q(\beta) := P(\beta) \cap X_\beta$ und für alle $\beta < \gamma$ stimme Q mit P überein. Mit $q := p$ ist $\tilde{q} = (q, Q) \in D$ eine (direkte) Erweiterung von $\tilde{p}$.

Für jede Bedingung $\tilde{r} \in G \cap D$ mit $\beta \in \mathrm{dom}(r)$ gilt nun $r(\beta) \in X_\beta$.

$\leftarrow$: Gelte umgekehrt $\overline{\overline{F}} = \alpha$ für $F = \{\beta \mid X_\beta \notin U_\beta\}$. Dann existiert für jedes $\beta \in F$ ein $Y_\beta \in U_\beta$, das disjunkt von X_β ist. Für alle $\beta \notin F$ sei $Y_\beta = X_\beta$. Dann gilt $Y_\beta \in U_\beta$ für alle β und nach dem eben Bewiesenen hat $F' = \{\beta \mid x_\beta \notin Y_\beta\}$ Kardinalität kleiner als α. Es folgt $\overline{\overline{F \setminus F'}} = \alpha$ und für alle β aus dieser Differenz muss gelten $x_\beta \notin X_\beta$.

Zu (3): Sei $\vec{X}$ eine Folge wie in der Voraussetzung. Wir definieren

$$D := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_M \mid \forall\beta \notin \mathrm{dom}(p)\ P(\beta) \subseteq X_\beta\}.$$

Behauptung: Es ist D dicht.
Beweis: Sei $\tilde{p} \in \mathcal{P}_M$, $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$. Wir schreiben wieder β^+ für die kleinste Ordinalzahl größer als β, an der p definiert ist. Nach Voraussetzung gilt $X_\beta \cap p(\beta^+) \in \dot{U}_\beta^{\beta^+}(p(\beta^+))$ und $Q(\beta) := P(\beta) \cap X_\beta$ ist für jedes $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$ ein β–Kandidat für $\tilde{p}$. Mit $q = p$ ist die Bedingung $\tilde{q} = (q, Q)$ eine Verstärkung von $\tilde{p}$ in D.

Sei nun $\tilde{p} \in G \cap D$. Für jedes $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$ und jedes $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ mit $\beta \in \mathrm{dom}(q)$ gilt

$$q(\beta) \in X_\beta.$$

Folglich ist $x_\beta \in X_\beta$ für alle β außer der endlich vielen in $\mathrm{dom}(p)$. q.e.d.

Für eine Charakterisierung ist Bedingung (2) nicht nötig. Wir definieren:

Definition 5.7.6 *Sei ein (α, κ)–kohärentes System $\mathcal{U}$ im Grundmodell gegeben. Dann nennen wir eine in κ konfinale Folge x mit Ordnungstyp α* Magidor–Folge *über V für $\mathcal{U}$, wenn x die Bedingung (3) aus obigem Lemma 5.7.5 erfüllt.*

Wir wollen zeigen, dass alle Magidor–Folgen auch generisch über dem Grundmodell sind. Zunächst eine Vorbemerkung zu Mengen von Ununterscheidbaren. In Satz 3.2.3 wurde zu einem gegebenen normalen Ultrafilter U eine Menge $I \in U$ von Ununterscheidbaren für eine Struktur $\mathcal{M}$ konstruiert. Haben wir eine Folge $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ normaler Ultrafilter, so können wir die Konstruktion unabhängig für jedes $\beta < \alpha$ durchführen. Mit denselben Methoden, mit denen wir wie im Beweis von Satz 3.2.3 Mengen guter Ununterscheidbarer fanden, erhalten wir eine Folge $\langle H_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ von Ununterscheidbarenmengen, so dass $\forall \beta < \alpha\ H_\beta \in U_\beta$ gilt und alle endlichen Tupel in H_β ununterscheidbar bleiben bei Wahl von Parametern in früheren H_γ, $\gamma < \beta$, genauer: Für jedes $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ in der Sprache von $\mathcal{M}$ und jeweils 2 Tupel $a = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ und $b = \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, so dass $\alpha_i, \beta_i \in H_i$ ist für alle $i \leq n$ und $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, $\beta_1 < \ldots < \beta_n$ ist, gilt

$$\mathcal{M} \models \varphi(a) \text{ genau dann, wenn } \mathcal{M} \models \varphi(b).$$

Eine solche Folge von Ununterscheidbarenmengen nennen wir *homogen.*

Wir beginnen wieder mit dem Fall der Länge $\alpha = \omega$. Wir beschränken uns auf das Teilforcing von $\mathcal{P}_M(\omega)$, in dem für alle Bedingungen (p, P) der Definitionsbereich von p eine natürliche Zahl ist. Dieses Teilforcing ist dicht in $\mathcal{P}_M(\omega)$, daher ist dies keine Einschränkung.

Lemma 5.7.7 *Sei $x = \langle x_n \mid n < \omega \rangle$ Magidor–Folge zum kohärenten System $\mathcal{U} = \langle U_n | n < \omega \rangle$ über V. Dann ist x Magidor–generisch über V in dem Sinne, dass ein $\mathcal{P}_M$–generischer Filter G über V existiert, so dass $V[G] = V[x]$.*

Beweis: Wir definieren

$$G_x := \{\tilde{p} \mid p \subseteq x,\ \forall n > \max(\mathrm{dom}(p))\ x_n \in P(n)\}.$$

Dann ist G_x Filter. (siehe Lemma 5.7.1)

Sei $D \subseteq \mathcal{P}_M(\omega)$ dicht offene Menge in V. Wir zeigen, dass G_x die Menge D trifft. Dazu sei $\mathcal{M}$ eine hinreichend gut reflektierende Struktur in einer Sprache der ersten Stufe, so dass $\kappa \subseteq \mathcal{M}$ und $\mathcal{P}_M(\omega)$, x und D als Konstanten in $\mathcal{M}$ enthalten sind. Sei $\langle H_n \mid n < \omega \rangle$ mit $H_n \in U_n$ eine homogene Folge von Ununterscheidbarenmengen für $\mathcal{M}$.

Für alle $n < \omega$ und alle streng monoton wachsenden $a : n \to \kappa$ sei $A_a : \omega \setminus n \to \mathrm{Pot}(\kappa)$ eine Reservoirmengenfunktion, so dass $(a, A_a) \in D$, falls eine solche Funktion existiert. Sonst sei $A_a(m)$ für $m > \max(\mathrm{dom}(a))$ gleich dem Intervall $(a(n-1), \kappa)$, falls $n \neq 0$ und ganz κ, falls $n = 0$. Es ist für alle $m \geq \max(\mathrm{dom}(a))$ die Reservoirmenge $A_a(m) \in U_m$. Wir wählen für jedes $m < \omega$

$$P(m) := H_m \cap \triangle_{\xi<\kappa} \bigcap_{\mathrm{dom}(a)\leq m, \max(a)<\xi} A_a(m)$$

(Dabei identifizieren wir wie immer die endliche Folge a mit der endlichen Menge range(a).) Dann gilt $P(m) \in U_m$ und für alle $a\colon n \to \kappa$ und alle $m \geq n$: $P(m) \setminus (\max(a) + 1) \subseteq A_a(m)$. Nach Lemma 5.7.2 können wir o.B.d.A. annehmen, dass (a, P) gut ist. Sonst gehen wir zu einer guten direkten Erweiterung über. Da D offen ist, folgt

$$\exists A \ (a, A) \in D \ \longrightarrow \ (a, P) \in D \tag{$*$}$$

Da x Magidor–Folge ist, existiert ein $n < \omega$, so dass für alle $m \geq n$ gilt $x_m \in P(m)$. Wir betrachten $\tilde{p} = (x \upharpoonright n, P \upharpoonright (\omega \setminus n)) \in \mathcal{P}_M(\omega)$. Es war D als dicht vorausgesetzt, sei also $\tilde{q} = (q, Q) \in D$ mit $q \supseteq p$ und $q(m) \in P(m)$ für alle $m \in \mathrm{dom}(q \setminus p)$, sowie $Q(m) \subseteq P(m)$ für alle $m \geq \mathrm{dom}(q)$. Weil jedes $q(m) \in H_m$ ist und die Mengen H_m eine homogene Folge Ununterscheidbarer bilden, gilt dasselbe auch für alle anderen aufsteigenden Tupel $s \in \prod_{m\in\mathrm{dom}(q\setminus p)} P(m)$ an Stelle von $q \setminus p$. Also haben wir $(x \upharpoonright \mathrm{dom}(q), Q \setminus x_{\max(\mathrm{dom}(q))+1}) \in D$. Wegen $(*)$ folgt nun $\tilde{r} := (x \upharpoonright \mathrm{dom}(q), P \upharpoonright [\mathrm{dom}(q), \omega)) \in D$. Wir sind fertig, denn $\tilde{r} \in G_x$. q.e.d.

Der allgemeine Fall ist wieder etwas komplizierter:

Satz 5.7.8 *Sei $\mathcal{U} = (\langle U_\beta | \beta < \alpha \rangle, \langle \dot{U}^\beta_\gamma | \gamma < \beta \leq \alpha \rangle)$ ein kohärentes System in V und sei $x = \langle x_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ eine Magidor–Folge zu $\mathcal{U}$ über dem Grundmodell V. Dann ist x Magidor–generisch über V.*

Beweis: Wir definieren wie in Lemma 5.7.3

$$G_x := \{\tilde{p} \in \mathcal{P}_M \mid \exists \tilde{q} \leq \tilde{p},\ \tilde{q} \text{ gut},\ q \subseteq x, \forall \beta \notin \mathrm{dom}(q)\ x_\beta \in Q(\beta)\}.$$

Dann ist G_x Filter, siehe den Beweis von 5.7.3.

Wir müssen zeigen, dass G_x jede dichte Menge schneidet. Sei also $D \subseteq \mathcal{P}_M$ dicht und offen. Sei $\mathcal{M}$ eine hinreichend gut reflektierende Struktur in einer abzählbaren Sprache, so dass $\kappa \subseteq \mathcal{M}$ und $\mathcal{P}_M, D, x$ als Konstanten in $\mathcal{M}$ sind. Sei $\langle H_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ eine homogene Folge von Ununterscheidbarenmengen für $\mathcal{M}$, wobei $H_\beta \in U_\beta$ für alle $\beta < \alpha$ sei.

Für alle aufsteigenden endlichen partiellen Funktionen $a : \alpha \hookrightarrow \kappa$ sei $A_a : \alpha \backslash \mathrm{dom}(a) \to \mathrm{Pot}(\kappa)$ eine Reservoirmengenfunktion, so dass $(a, A_a) \in D$, falls eine solche existiert. Wir nehmen wieder ohne Einschränkung an, dass (a, A_a) gut ist. Falls keine solchen Reservoirmengen existieren, dann sei $A_a(\beta) := (\beta_a^-, \beta_a^+)$ (wobei $\beta_a^- = \max((\mathrm{dom}(a) \cap \beta) \cup \{0\})$ und $\beta_a^+ = \min((\mathrm{dom}(a) \setminus \beta) \cup \{\alpha\})$). Es gilt für alle $a : \alpha \hookrightarrow \kappa$, $\overline{\overline{a}} < \omega$, $\forall \beta \notin \mathrm{dom}(a)\ A_a(\beta) \in \dot{U}_\beta^{\beta_a^+}(a(\beta_a^+))$.

Wir definieren für alle $\beta, \beta' < \alpha$ mit $\beta < \beta'$ und jedes $\xi < \kappa$:

$$A_\xi(\beta, \beta') := \bigcap \{A_a(\beta) \mid \beta \notin \mathrm{dom}(a),\ \beta' = \beta_a^+,\ a(\beta') = \xi\} \in \dot{U}_\beta^{\beta'}(\xi).$$

Dann gilt für alle $\beta, \beta' < \alpha$, $\beta < \beta'$ und alle $\xi < \kappa$: $A_\xi(\beta, \beta') \subseteq \xi$. Für jedes Paar (β, β') sei nun nach Lemma 3.1.4 eine Menge $P(\beta, \beta') \subseteq \kappa$ gewählt, so dass $C(\beta, \beta') := \{\xi | P(\beta, \beta') \cap \xi = A_\xi(\beta, \beta')\} \in U_{\beta'}$. Bedingung (2) aus unserer Definition eines kohärenten Systems liefert nun, dass $P(\beta, \beta')$ im Ultrafilter U_β ist. Ferner gilt für alle $\xi < \kappa$ und alle endlichen a mit $\beta \notin \mathrm{dom}(a)$ und $a(\beta_a^+) = \xi$ dann, dass

$$P(\beta, \beta_a^+) \cap \xi \subseteq A_a(\beta).$$

Schließlich eliminieren wir den Parameter β', indem wir definieren

$$P(\beta) := \bigcap_{\beta' < \alpha} P(\beta, \beta') \cap H_\beta \in U_\beta.$$

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Bedingung $(\emptyset, P)$ gut ist, sonst ersetzen wir sie durch eine gute direkte Erweiterung. Da D offen ist, haben wir nun

$$\exists A\ (a, A) \in D \longrightarrow (\emptyset, P) \otimes a \in D \qquad (*)$$

Es ist x Magidor–Folge, sei also $p \subseteq x$ eine endliche Teilmenge, so dass für alle $\beta \notin \mathrm{dom}(p)$ gilt $x_\beta \in P(\beta)$. Wir betrachten $\tilde{p} := (\emptyset, P) \otimes p$. Nach Voraussetzung ist D dicht, sei also $\tilde{q} \leq \tilde{p}$ so, dass $\tilde{q} \in D$. Nun liefert $(*)$, dass schon $(\emptyset, P) \otimes q \in D$ ist. Für alle Stellen $\beta \in \mathrm{dom}(q \setminus p)$ gilt $q(\beta) \in P(\beta) \subseteq H_\beta$. Da $\langle H_\beta | \beta < \alpha\rangle$ eine homogene Folge von Ununterscheidbarenmengen ist, gilt dasselbe auch für jedes andere aufsteigende Tupel aus $\prod_{\beta \in \mathrm{dom}(q \setminus p)} P(\beta)$, insbesondere für $x \upharpoonright \mathrm{dom}(q \setminus p)$. Also folgt

$$\tilde{r} := (\emptyset, P) \otimes (x \upharpoonright \mathrm{dom}(q)) \in D$$

und es ist $\tilde{r} \in G_x$. q.e.d.

Damit wurde eine zu Mathias' Resultat 3.5.4 analoge Charakterisierung erreicht.

Literaturverzeichnis

[Can74] Georg Cantor. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Crelles Journal f. Mathematik*, 77:258–262, 1874.

[CK90] C.C. Chang and H.J. Keisler. *Model Theory.* North-Holland, 3th edition, 1990.

[Coh63] Paul Cohen. The independence of the Continuum Hypothesis I. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 50:1143–1148, 1963.

[Cum93] James Cummings. Possible behaviours for the Mitchell ordering. *Annals of Pure and Applied Logic*, 65:107 – 123, 1993.

[Eas70] William B. Easton. Powers of regular cardinals. *Annals of Mathematical Logic*, 1:139 – 178, 1970.

[Fod56] Geza Fodor. Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 17:139 – 142, 1956.

[Git89] Moti Gitik. The negation of the singular cardinal hypothesis from $o(\kappa) = \kappa^{++}$. *Annals of Pure and Applied Logic*, 43:209 – 234, 1989.

[GM92] Moti Gitik and Menachem Magidor. The Singular Cardinal Hypothesis revisited. In H. Judah, W. Just, and H. Woodin, editors, *Set Theory of the Continuum*, pages 243 – 279. Springer, 1992.

[Göd31] Kurt Gödel. über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.

[Göd38] Kurt Gödel. The consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 24:556–557, 1938.

[Göd40] Kurt Gödel. *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory.* Number 3 in Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, 1940.

[Hau08] Felix Hausdorff. Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen. *Mathematische Annalen*, 65:435–505, 1908.

[Hil00] David Hilbert. Mathematische probleme. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, pages 253–297, 1900.

[Jec78] Thomas Jech. *Set Theory.* Addison Wesley, 1978.

[Kan94] Akihiro Kanamori. *The higher Infinite.* Springer, 1994.

[Koe99] Peter Koepke. An Iteration Model violating the Singular Cardinals Hypothesis. In S.B. Cooper and J.K. Truss, editors, *Sets and Proofs.* Cambridge University Press, 1999.

[Koe00] Peter Koepke. mündliche Mitteilung, 2000.

[Kun80] Kenneth Kunen. *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs.* North-Holland, 1980.

[Mag78] Menachem Magidor. Changing cofinality of cardinals. *Fundamenta Mathematicae*, 99:61–71, 1978.

[Mat73] Adrian Mathias. On sequences generic in the sense of Prikry. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 15:409–414, 1973.

[Mit74] William Mitchell. Sets Constructible from Sequences of Ultrafilters. *Journal of Symbolic Logic*, 39:57–66, 1974.

[Mit84] William Mitchell. The core model for sequences of measures I. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 95:229–260, 1984.

[Pri70] Karel Prikry. Changing measurable into accessible cardinals. *Dissertationes Mathematicae*, 68:5–52, 1970.

[Row71] Frederick Rowbottom. Some strong axioms of infinity incompatible with the axiom of constructibility. *Annals of Mathematical Logic*, 3:1–44, 1971.

[Sac71] Gerald Sacks. Forcing with perfect closed sets. In Dana Scott, editor, *Axiomatic Set Theory*, volume 13, Part 1 of *Proc. Symp. Pure Math*, pages 331–355. American Mathematical Society, 1971.

[Sil71] Jack Silver. Some applications of model theory in set theory. *Annals of Mathematical Logic*, 3:45–110, 1971.

[Sil74] Jack Silver. On the singular cardinals problem. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1974.

[SRK78] Robert Solovay, William Reinhardt, and Akihiro Kanamori. Strong axioms of infinity and elementary embeddings. *Annals of Mathematical Logic*, 13:73–116, 1978.

[Ula30] Stanislaw Ulam. Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre. *Fundamenta Mathematicae*, 16:140–150, 1930.

[Zer08a] Ernst Zermelo. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen*, 65:107 – 128, 1908.

[Zer08b] Ernst Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 65:261 – 281, 1908.