Analysis 3

06.11.2018
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 13.11.2018 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Hausdorffdimension **$4 \times 2.5 = 10$ Punkte**

Für $s \geq 0$ sei $\mathcal{H}^s$ das s-dimensionale Hausdorffmaß im $\mathbb{R}^d$. Für $A \subset \mathbb{R}^d$, definiere

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{t \geq 0 \colon \ \mathcal{H}^t(A) = 0\}.$$

Zeigen Sie das Folgende:

(a) $\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{t \geq 0 \colon \mathcal{H}^t(A) = \infty\}$.

(b) $\dim_{\mathcal{H}}(A) \in [0, d]$.

(c) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^d$, so ist $\dim_{\mathcal{H}}(A \cup B) = \max\{\dim_{\mathcal{H}}(A), \dim_{\mathcal{H}}(B)\}$ sowie $\dim_{\mathcal{H}}(A \cap B) \leq \min\{\dim_{\mathcal{H}}(A), \dim_{\mathcal{H}}(B)\}$.

(d) Sei X ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^d$ mit $X = x + V$, wobei $x \in \mathbb{R}^d$ und V ein k-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^d$ ist; hier, $k < d$. Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathcal{H}}(X) = \dim(V) = k$. In diesem Sinne verallgemeinert $\dim_{\mathcal{H}}$ den aus der linearen Algebra bekannten Dimensionsbegriff für Vektorräume auf beliebige Mengen.

Aufgabe 2: Messbarkeit **$5 + 5 = 10$ Punkte**

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, 3$, drei Maßräume. Wir nennen eine Abbildung $f \colon \Omega_i \to \Omega_j$ $\mathcal{A}_i - \mathcal{A}_j$-*messbar*, falls für alle $A \in \mathcal{A}_j$ gilt: $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_i$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$-messbar und $g \colon \Omega_2 \to \Omega_3$ $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$-messbar, so ist $g \circ f$ $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$-messbar.

(b) Sei f wie in (a). Zeigen Sie, dass dann $\nu \colon \mathcal{A}_2 \to [0, \infty]$ definiert durch $\nu(A) := \mu_1(f^{-1}(A))$ ein Maß auf $\mathcal{A}_2$ definiert.

Aufgabe 3: **$5 + 5 = 10$ Punkte**

In dieser Aufgabe arbeiten wir direkt anhand der Definition 4.2 des Lebesgueintegrals bezüglich eines Maßes.

(a) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ und $\mu \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu(A) = \mathcal{H}^0(A), \qquad A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ein Maßraum ist. Zeigen Sie weiters, dass jede Funktion $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar ist und gilt:

$$\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Insbesondere kann also die Theorie der Reihen aus der Analysis 1 als Spezialfall des Lebesgueintegrals bezüglich des Maßes μ interpretiert werden.

(b) Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ eine nichtleere, kompakte Menge und sei $\mathcal{A} := \{U \cap K\colon\ U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ die σ-Algebra relativ zu K (vergleiche Übungsblatt 3, Aufgabe 3(c)). Sei weiters μ ein Maß, sodass $(K, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ist mit $\mu(K) < \infty$. Zeigen Sie: Für alle stetigen Funktionen $f\colon K \to \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\int_K f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \mu(K) \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Aufgabe 4: Berechnung von Integralen **$4 \times 2.5 = 10$ Punkte**

Es bezeichne im Folgenden für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ $\mathbf{1}_A$ ihre Indikatorfunktion. Berechnen Sie direkt anhand Definition 4.2

(a) für $0 \leq p < \infty$ das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f_p \,\mathrm{d}m,$$

wobei $f_p(x) := \mathbf{1}_{[0,1]}(x) x^p$.

(b) für eine ungerade, gleichmäßig stetige Funktion $g\colon\ \mathrm{B}(0,1) \to \mathbb{R}$ (i.e., g ist gleichmäßig stetig mit $g(x) = -g(-x)$ für alle $x \in \mathrm{B}(0,1)$) das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathrm{B}(0,1)} g \,\mathrm{d}m^d,$$

wobei $\mathrm{B}(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| < 1\}$ der offene Einheitsball im $\mathbb{R}^d$ ist.

(c) für die Funktion $f := \mathbf{1}_{\partial \mathrm{B}(0,1)}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}m^d.$$

(d) in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_a \,\mathrm{d}m^d \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} j_a \,\mathrm{d}m^d,$$

wobei $h_a(x) := \mathbf{1}_{\mathrm{B}(0,1)}(x)|x|^a$ und $j_a(x) := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(0,1)}(x)|x|^a$.

Gehen Sie hierbei insbesondere auf die Messbarkeit der jeweiligen Integranden ein.