Analysis 3

18.12.2018
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 08.01.2019 in der Vorlesung

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: Gaußscher Satz **7.5 + 7.5 = 15 Punkte**

Verifizieren Sie den Gaußschen Integralsatz (i.e. $\int_D \operatorname{div}(v)\,\mathrm{d}m = \int_{\partial D} v \cdot n\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}$, wobei $n\colon \partial D \to S^{d-1}$ die äußere Einheitsnormale an ∂D ist) für die folgenden Vektorfelder v und Gebiete D:

(a) $D := \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3\colon\ 0 \leq x,y,z \leq 1\}$, $v(x,y,z) := (4xz, -y^2, yz)^\top$.

(b) $D := \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 3\}$, $v(x,y,z) := (4x, -2y^2, z^2)^\top$.

Aufgabe 2: Gaußscher Satz **15 Punkte**

Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *harmonisch*, falls $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^d)$ und

$$-\Delta f = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^d$$

gilt. Sei nun $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ harmonisch.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und alle $r > 0$

$$f(x_0) = \frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial \mathrm{B}_r(x_0))} \int_{\partial \mathrm{B}_r(x_0)} f\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie weiters, für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und alle $r > 0$

$$f(x_0) = \frac{1}{m^d(\mathrm{B}_r(x_0))} \int_{\mathrm{B}_r(x_0)} f\,\mathrm{d}m^d$$

gilt. Beachten Sie, dass wir in der letzten Formel **nicht** den Limes '$\lim_{r\searrow 0}$' auf der rechten Seite benötigen. Diskutieren Sie dies im Hinblick auf allgemeine stetige bzw. integrierbare Funktionen.

Tipp für (a). Betrachten Sie die Funktion $g(r) := (\mathcal{H}^{d-1}(\partial\,\mathrm{B}_r(x_0)))^{-1} \int_{\partial \mathrm{B}_r(x_0)} f\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}$ und zeigen Sie durch Differenzieren, dass g konstant ist. Benutzen Sie dann an geeigneter Stelle den Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 3: Gaußscher Satz **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein glatt berandetes Gebiet, das den Bedingungen des Gaußschen Integralsatzes genügt. Zeigen Sie, dass dann

$$dm^d(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x \cdot n(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}(x)$$

gilt, wobei $n\colon \partial\Omega \to S^{d-1}$ die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ ist. Schlussfolgern Sie, dass

$$dm^d(\mathrm{B}_1(0)) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial \mathrm{B}_1(0)).$$