Einführung in die PDGs

24.05.2019
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 31.05.2019 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Hermitefunktionen und Polynome **4 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte**

Sei $d = 1$. Wir definieren rekursiv Funktionen $h_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h_0(x) := \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}, \quad h_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2n}}\Big(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)h_{n-1}(x).$$

Diese Funktionen heißen *Hermitefunktionen*.

(a) Zeigen Sie, dass die einzigen Eigenwerte der Fouriertransformation in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ durch ± 1 und $\pm \mathrm{i}$ gegeben sind, und dass die Hermitefunktionen entsprechende Eigenvektoren der Fouriertransformation sind. Zeigen Sie, dass die Hermitefunktionen h_n, h_m zu $n \neq m$ orthogonal sind (in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$) und bestimmen Sie die $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$-Norm von h_n.

Sei nun $H_n(x) := h_n(x)e^{\frac{|x|^2}{2}}$.

(b) Zeigen Sie, dass jedes H_n ein monisches Polynom ist. Was ist dessen Grad?

(c) Bestimmen Sie a_n für $n \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = a_n\delta_{n,m}.$$

(d) Zeigen Sie, dass die Hermitepolynome die Hermitegleichung

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

erfüllen.

Aufgabe 2: Fundamentallösungen revisited **2 + 2 + 6 = 10 Punkte**

Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^d,$$

wobei $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gegeben ist. Wir wollen in dieser Aufgabe die Fundamentallösung des Differentialoperators auf der linken Seite herleiten.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\widehat{f}(y)}{1+|y|^2}\Big)(x),$$

wobei wir simultan $\mathcal{F}$ bzw. $\widehat{\cdot}$ für die Fouriertransformation schreiben.

(b) Schließen Sie aus (a), dass es eine Funktion $B\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$u = \frac{B * f}{\sqrt{(2\pi)^d}}.$$

(c) Zeigen Sie, dass B aus (b) gegeben ist durch

$$B(x) = \frac{1}{2^{d/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{d/2}}\,\mathrm{d}t,$$

und geben Sie sodann die Darstellung der eingangs gestellten PDE als Faltung mit B an.

Aufgabe 3: Temperierte Distributionen **5 + 5 = 10 Punkte**

Für eine lokal-integrierbare Funktion $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ definieren wir

$$T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} f\varphi\,\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

wann immer dies wohldefiniert ist. Zeigen Sie, dass

(a) $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, wobei $f(x) = e^x$,

(b) $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, wobei $f(x) = e^x \cos(e^x)$.

Aufgabe 4: Maße und temperierte Distributibonen **4 + 4 + 2 = 10 Punkte**

Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}^d$, i.e., $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$T_\mu(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\,\mathrm{d}\mu, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

eine temperierte Distribution definiert wird, d.h., $T_\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(b) Man finde eine alternative Formel für die Faltung mit T_μ, in der temperierte Distributionen nicht vorkommen.

(c) Was ist die Faltung mit dem Diracmaß δ_0?