Kapitel 14 – Der Satz von Picard-Lindelöf

Dieses Kapitel besteht aus einem einzigen Satz mit Anwendungen. Inhalt des Satzes ist das Anfangswertproblem für Systeme von Differentialgleichungen. Die Formulierung ist lang, und erfasst verschiedene Aspekte, die ich zusammen sehen möchte. Wie bei den linearen Gleichungen lassen sich Gleichungen und Systeme höherer Ordnung als Systeme erster Ordnung umschreiben.

Wir betrachten folgende Situation:

1. $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ sei offen. Für $t \in \mathbb{R}$ sei
$$U_t = \{x \in \mathbb{R}^d : (t,x) \in U\}.$$
Die Mengen U_t heißen Schnitte und sind offen.

2. Es sei $F \in C(U;\mathbb{R}^d)$ und $k \geq 1$ Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei $F(t,.) \in C^k(U_t;\mathbb{R}^d)$. Ist α ein Multiindex der Länge $|\alpha| \leq k$ in $\mathbb{R}^d$ so sei $\partial^\alpha F \in C(U;\mathbb{R}^d)$. Diese Bedingung ist sicher erfüllt, falls $F \in C^k(U;\mathbb{R}^d)$.

3. Sei $(t_0, x_0) \in U$. Wir betrachten das Anfangswertproblem
$$\dot{x} = F(t,x) \qquad x(t_0) = x_0.$$
Wir werden sehen, dass es genau eine Lösung auf einem maximalen Zeitintervall gibt. Existenz, Eindeutigkeit und die Charakterisierung des maximalen Zeitintervalls sind zentrale Elemente.

4. Darüberhinaus werden wir die Lösung $x(t)$ als eine Funktion von t und x_0 betrachten und die Differenzierbarkeit dieser Funktion untersuchen. Insbesondere müssen wir hierfür den Definitionsbereich dieser Funktion verstehen.

5. Man kann allgemeinere Situationen betrachten, wie die Abhängigkeit von Parametern. Wir tun das nicht, da wir derartige Aussagen auf unseren Satz zurückführen können.

6. Wir können auch Mengen U der Form $J \times W$ betrachten, wobei W offen und J ein halboffenes oder sogar kompaktes Intervall ist. Die Änderungen sind unwesentlich.

Lemma. *Es existiert eine Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit*

1. $0 \leq \eta(x) \leq 1$ *für* $x \in \mathbb{R}^d$
2. $\eta(x) = 1$ *für* $|x| \leq 1$
3. $\eta(x) = 0$ *für* $|x| \geq 2$.

Beweis. In Analysis 1 hatten wir gesehen, dass

$$\eta_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq 0 \\ e^{-1/s} & \text{falls } s > 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist. Wir definieren

$$\eta = \frac{\eta_0(4 - |x|^2)}{\eta_0(4 - |x|^2) + \eta_0(s^2 - 1)}$$

Der Nenner ist immer positiv. Damit ist der Träger $\overline{\{x : \eta(x) \neq 0\}} \subset B_2(0)$ und $\eta(x) = 1$ für $|x| \leq 1$. □

Satz 0.1. *Es seien U und F wie oben.*

1. *Sei $(t_0, x_0) \in U$. Dann existiert genau ein offenenes Intervall I und genau eine Funktion $x \in C^1(I)$ sodass*
   (a) *Für jedes $t \in I$ gilt $(t, x(t)) \in U$.*
   (b) *$x(t_0) = x_0$ und $\dot{x} = F(t, x(t))$ für $t \in I$.*
   (c) *Sei*
   $$A_\pm = \{(t, x(t)) : t \in I, \pm(t - t_0) \geq 0\}.$$
   Entweder ist $\overline{A_\pm}$ nicht in U enthalten, oder $\overline{A_\pm}$ ist nicht kompakt.

2. *Für $x_0 \in U_{t_0}$ sei I_{x_0} das obige Intervall.*
   (a) *Die Menge*
   $$V = \{(x_0, t) : t \in I_{x_0}\}$$
   ist offen.
   (b) *$x(t; x_0) \in C(V)$.*
   (c) *x ist für festes t kmal stetig nach x differenzierbar. Ist α ein Multiindex in $\mathbb{R}^d$ der Länge $\leq k$, so ist*
   $$\partial^\alpha u(t, x) \in C(V).$$
   Außerdem ist $\partial^\alpha u$ stetig nach t differenzierbar und
   $$\partial^\alpha \partial_t u(t, x) \in C(V)$$

Beweis. Mit Hilfe des Satzes von Picard, Satz **??** werden wir zunächst zeigen, dass für $(t_0.x_0) \in U$ ein offenes Intervall $I \ni x_0$ und eine Lösung des Anfangswertproblems mit dem Anfangswert $x(t_0) = x_0$ existiert.

Sei also $(t_0, x_0) \in U$. Dann existiert $r > 0$ so dass

$$B_{3r}(x_0) \times [t_0 - r, t_0 + r] \subset U$$

Da $\overline{B_{2r}(x_0)} \times [t_0 + r, t_0 + r]$ kompakt ist, existiert nach dem Satz vom Maximum ein $C > 0$ so dass

$$|F(t,x)| \leq C, |\partial_{x_j} F(t,x)| \leq C/d$$

und daher auch

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq C|x - y|$$

für $|x - x_0|, |y - x_0|, |t - t_0| \leq r$.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \eta((x - x_0)/r)F(t,x) =: \tilde{F}(t,x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Da η und F stetig differenzierbar sind, gilt dies auch für $\tilde{F}$. Außerdem sind die Ableitungen von F und η auf den relevanten Mengen beschränkt, also gilt dies auch für $\tilde{F}$, und damit ist $\tilde{F}$ Lipschitz stetig.

Nach Satz **??** existiert genau eine Lösung auf $[t_0 - r, t_0 + r]$. Es existiert $\delta > 0$ sodass

$$x(t) \in B_r(x_0)$$

für $|t - t_0| < \delta$. Wir erhalten also eine lokale Lösung, da $\eta((x - x_0)/r)$ auf diesem Ball identisch 1 ist.

Zusammengefasst erhalten wir genau eine lokale Lösung des Anfangswertproblems.

Seien jetzt I_0 und I_1 offene Intervalle, die einen gemeinsamen Punkt t_0 enthalten und zwei Lösung $x^0 \in C^1(I_0; \mathbb{R}^d)$ und $x^{\text{‘}} \in C^1(I_1; \mathbb{R}^d)$ mit $x^1(t_0) = x^2(t_0)$. Nach dem ersten Schritt existiert eine Umgebung von t_0, auf der die Lösungen übereinstimmen. Sei $I = (a,b)$ das größte offene Intervall in $I_0 \cap I_1$, auf dem die Lösungen übereinstimmen. Wir nehmen nun an, $b \in I_0 \cap I_1$. Dann ist $x^2(b) = x^1(b)$ und die Lösungen stimmen auf einer offenen Mengen um b überein. Daher ist $I = I_0 \cup I_1$ und wir können die Lösung zu einer Lösung auf der Vereinigung der Intervalle fortsetzen.

Sei nun I die Vereinigung aller offenen Intervalle, die t_0 enthalten, und auf denen eine Lösung mit $x(t_0) = x_0$ existiert. Sei $I_+ = I \cap [a, \infty)$. Wir nehmen nun an dass A_+ präkompakt in U ist. Wir zeigen, dass dann eine Lösung auf einem größeren Intervall existiert. Da also $\overline{A}_+ \subset U$ kompakt ist, ist $F|_{\overline{A_+}}$ beschränkt, damit ist $\dot{x}(t)$ in $I_+ := I_0 \cup [t_0, \infty) = [t_0, t_1)$ gleichmässig beschränkt und der Limes

$$x(t_1) := \lim_{t \to t_1} x(t)$$

Aus der Gleichung folgt dass dann $x|_{[t_0,t_1]} \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R})$. Wir lösen nun das Anfangswertproblem mit den Anfangswerten $(t_1, x(t_1))$. Die Lösung ist wieder eindeutig und wir setzen die Lösung zu einer Lösung auf einem größeren Definitionsbereich zusammen. Damit erhalten wir die Aussage 1(c).

Wir wenden uns nun der Differenzierbarkeit zu, woraus auch die Stetigkeitsaussagen folgen werden. Sei $x(t)$ eine Lösung zum Aanfangswertproblem $x(t_0) = x_0$ und $J \subset I_{x_0}$ ein kompaktes Intervall, das t_0 enthält. Dann existiert $r > 0$ so dass

$$\{(t, y) : |y - x(t)| < 2r \subset U.$$

Da

$$A_r = \{(t, y) : |y - x(t)| \le r$$

kompakt ist existiert $C > 0$ so dass

$$|F(t, x)| \le C \qquad |F(t, x) - F(t, y)| \le C|x - y|$$

in dieser Menge. Sei $y_0 \in B_r(x_0)$ und $y \in C^1(I_y)$ die Lösung des AWPs mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$. Sei $J_1 \subset J$ das maximale Intervall so dass

$$|y(t) - x(t)| \le 2r$$

für $t \in J_1$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} e^{-2C|t-t_0|}|x(t) - y(t)|^2 \\ &\qquad = e^{-2C|t|}(-2C|x(t) - y(t)^2 + 2\langle x(t) - y(t), F(t, x(t)) - F(t, y(t))\rangle) \\ &\qquad \le 0 \end{aligned}$$

und daher

$$|x(t) - y(t)| \le e^{C|t-t_0|}|x_0 - y_0|.$$

Sei L die Länge von J. Wir wählen

$$\varepsilon = e^{-CL} r.$$

Ist $y_0 \in B_\varepsilon(x_0)$ so folgt $(t, y(t)) \in A_r$ für $t \in J$.
Dann ist $J_1 = J$ und wir haben die Lipschitzstetigkeit und damit die Stetigkeit gezeigt. Insbesondere folgt auch, dass V offen ist. Wir schreiben $x(t; y_0)$ für die Lösung des Anfangswertproblems. Als Funktion von y_0 ist diese Funktion Lipschitz stetig in $B_\varepsilon(x_0)$ mit einer von t unabhängigen Lipschitzkonstanten. Da die Lösung differenzierbar und damit stetig in t ist, folgt die Stetigkeit als Funktion von t und y.

Wir zeigen nun die Differenzierbarkeit.
Sei jetzt

$$A(t) = D_x F(t, x(t; x_0))$$

und, $x_0^1 = x_0 + sv$ mit $|v| = 1$, y wie oben und

$$y^h(t) = \frac{1}{h}(x(t; x_0 + sv) - x(t; x_0))$$

für $|s| \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$|y^h(t)| \leq e^{C|t-t_0|}.$$

Sei z die Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$\dot{z} = A(t)z \qquad z(0) = v$$

und $w = y^h - z$. Es genügt der Gleichung

$$\dot{w} = A(t)w + \left(\frac{F(t, x(t)) - F(t, y(t)}{h} - A(t)y^h(t) \right)$$

mit dem Anfangswert $w(a) = 0$.
Wir erhalten

$$\begin{aligned} K(t) :=& \Big[\frac{F(t, x(t; x_0 + hv)) - F(t, x(t; x_0))}{h} - A(t) \Big] y^h(t) \\ =& \int_0^1 D_x F(t, x(t; x_0) + shx(t; x_0 + hv)) - D_x F(t, x(t)) ds y^h(t). \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert r so dass

$$|K(t)| \leq \varepsilon |y^h(t)|.$$

Wir berechnen wieder

$$\frac{d}{dt} e^{-2C|t-t_0|} |w(t)|^2 \leq 2\varepsilon$$

also

$$|w(t)| \leq \varepsilon |t_1 - t_0| e^{C|t-t_0|}$$

Damit ist $x(t; x_0)$ in x_0 in Richtung v total differenzierbar mit Richtungsableitung $z(t)$. $\square$

Schlußbemerkungen:

1. Im letzten Kapitel hatten wir die Gleichung

$$-y'' + qy = \lambda y$$

mit den Anfangswerten $y(a) = 0$ und $y'(a) = 1$ betrachtet. Wir schreiben dieses Anfangswertproblem als System von drei Gleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Anfangswerten

$$x(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Die Lösung hängt dann stetig und sogar differenzierbar von λ ab. Wir erhalten

$$y(t;\lambda) = x_1(t).$$

2. Allgemein können Gleichungen höherer Ordnung zu Systemen umgeschrieben werden.

0.1 Zusammenfassung Differentialgleichungen

1. Der Existenzsatz von Picard-Lindelöf stellt die Existenz einer lokalen Lösung von ziemlich allgemeinen Anfangswertproblemen sicher. Außerdem macht er relativ abstrakte Aussagen über das Existenzintervall und die Abhängkeit von Anfangswerten.

2. Differentialgleichungen sind ein wesentliches Hilfsmittel zur Beschreibung von zeitabhängigen Prozessen, z.B die Planetenbewegungen im Sonnensystem. Im Allgemeinen gibt es keine explizite Lösungen und das Studium spezieller Gleichungen ist in der Regel schwierig. Die numerische Simulation ist ein Hilfsmittel, das Einsichten gibt, aber ein analytisches Verständnis nicht ersetzt, sondern ergänzt.

3. Für lineare Gleichungen gibt es klarere Strukturen. Stichpunkte sind

   (a) das Fundamentalsystem: Der Lösungsraum des homogenen Systems mit d Gleichungen und d Unbekannten hat die Dimension d.

   (b) die Variation der Konstanten zur Lösung der inhomogenen Gleichung, falls ein Fundamentalsystem gegeben ist.

   (c) Für konstante Koeffizienten (d.h. von t unabhängige Koeffizienten) kann man mehr Aussagen: Ein Fundamentalsystem ist durch die Spalten der Matrixexponentialfunktion gegeben, die wiederum mit Hilfe eine Jordanzerlegung bestimmt werden kann. Für Gleichungen höherer Ordnung erhält man ein Fundamentalsystem über die characteristischen Exponenten, d.h. die Nullstellen des zur Gleichung gehörenden Polynoms.

4. Für skalare Gleichungen ($d = 1$) kann man Lösungen oft mit analytischen Methoden bestimmen. Beispiele sind

   (a) Die Wachstumsgleichung

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + f(t)$$

(b) Gleichungen mit getrennten Veränderlichen

$$\dot{x} = f(t)g(x)$$

Im Unterschied zum Existenzsatz von Picard nehmen wir hier an, dass $g(x) \neq 0$, und wir benötigen keine Lipschitzbedingung an g - hier genügt Stetigkeit.

(c) Noch allgemeiner sind exakte Differentialgeleichung. Zu der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t,x)$$

gehört die Pfaffsche Form

$$\omega(t,x) = f(t,x)dt - dx.$$

Dann ist $x(t)$ genau dann eine Lösung wenn

$$\omega(t,x(t))\begin{pmatrix}1\\ \dot{x}\end{pmatrix} = 0$$

Ist ω exakt, d.h. falls F existiert mit $\omega = dF$, so folgt für die Lösung

$$F(t,x(t)) = 0$$

und die Lösung der Differentialgleichung reduziert sich auf eine Anwendung des Satzes über implizite Funktionen.