Universität Bonn
Mathematisches Institut
Prof. Dr. M. Rapoport, Dr. J. Stix

Vortragsliste für das Seminar

Algebraische Kurven

— Sommersemester 2005, Do 14–16, SR D —

1. **Algebraische Kurven ([Ha] I.6, [Se1] II §1+§2).** Definition einer regulären, eigentlichen, geometrisch zusammenhängenden Kurve X/k, Funktionenkörper $K(X)$, abgeschlossene Punkte entsprechen diskreten k-Bewertungsringen von $K(X)$, Fortsetzungslemma: rationale Funktionen auf X mit Werten in einer projektiven Varietät sind überall regulär, nichtkonstante Elemente des Funktionenkörpers entsprechen endlichen Abbildungen nach $\mathbb{P}^1_k$, Dedekind-Weber Äquivalenz von Kurven und Funktionenkörpern. Struktur der komplettierten lokalen Ringe (k perfekt).

2. **Divisoren, Linienbündel und Differentiale ([Ha] II.6+8, [Se1] II §3+§9).** Auf Kurven: Divisoren, Linienbündel, Linienbündel zu einem Divisor, Hauptdivisoren. Jede nichtkonstante Abbildung zwischen Kurven ist endlich, Verzeigungsindizes, Fundamentale Gleichung (der Fasern), Divisorklassengruppe, Norm und Inklusion für Divisoren entlang Abbildungen zwischen Kurven [Se2] I §4+§5, Grad eines Divisors & Linienbündels, Grad von Hauptdivisoren = 0. Derivationen, Differentiale, die Garbe $\Omega_{X/k}$, für perfekte k: die Halme von $\Omega_{X/k}$ in abg. Punkten x sind frei vom Rang 1 mit Basis dt für eine Uniformisierende t in x, rationale Differentiale, Geschlecht, kanonische Klasse.

3. **Repartitionen und Kohärenzsatz ([Ha] IV.1, [Se1] II §4+§5), [Fu] VIII.2, [Sx]).** Definition: Repartitionen R, Repartitionen mit beschränkten Nennern $R(D)$, $I(D) = R/R(D) + K(X)$, $l(D)$ und $i(D)$. Die 5-Term-Sequenz, Kohärenzsatz: $l(D)$ und $i(D)$ sind endlich, siehe [Sx]. Erste Form des Satzes von Riemann-Roch: Eulercharakteristik.

4. **Abstrakte Residuen ([Ta] §1-§3).** Endlichpotente lineare Abbildungen, Spur von solchen, Existenzsatz für abstrakte Residuen, Residuen auf Kurven, Residuen und Laurentreihen [Ta] Thm 2.

5. **Residuensatz und Adjunktionsformel ([Ta] §1-§3, [Se1] II §12 Lemme 4+5).** Residuensatz [Ta] §3 Thm 3 & Cor, Adjunktionsformel [Ta] §3 Thm 4.

6. **Dualität und Riemann-Roch ([Se1] II §6+§8+§9, [Ha] IV.1 Ex 1.1-1.3).** Stetiges dual $J = \bigcup J(D)$, Dimension von J über $K(X)$, Residuenpaarung, Dualitätssatz, endgültiger Riemann-Roch für Linienbündel auf Kurven, Folgerungen aus Riemann-Roch: echte offene Teile von Kurven sind affin.

7. **Riemann-Hurwitz-Formel ([Ha] IV.1+2).** Grad der kanonischen Klasse, Eindeutigkeit der kanonischen Klasse als ‘dualisierender Divisor’ im Satz von Riemann-Roch, Kurven

vom Geschlecht 0 mit rationalem Punkt sind isomorph zu $\mathbb{P}^1_k$. Vergleich der Differentialgarben entlang einer verzweigten Überlagerung von Kurven, Riemann-Hurwitz-Formel, Frobenius, Lüroths Theorem, der $\mathbb{P}^1_k$ ist einfach zusammenhängend.

8. **Hyperelliptische Kurven und kanonische Einbettung ([Ha] IV.1+4+5, [GH] p.253-258).** Elliptische Kurven ($g = 1$ und rationaler Punkt) erfüllen eine Legendregleichung $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ [Ha] IV.4.6 mit globalem Differential dx/y und haben triviale kanonische Klasse [Ha] IV.1.3.6. Linienbündel und Abbildungen in den $\mathbb{P}^n$, Definition g^r_d, Definition einer hyperelliptischen Kurve, in Charakteristik $\neq 2$: Gleichung $y^2 = f(x)$ und globale Differentiale $x^i dx/y$, Diskussion des kanonischen Linearsystems [Ha] IV.5.1-5.3, hyperelliptische Involution.

9. **Cliffords Theorem und das Theorem über allgemeine Lage ([Ha] Thm IV.5.4, [Go] §1+§3, [ACGH] III §1).** Cliffords Lemma, Cliffords Theorem, das Theorem über allgemeine Lage.

Literatur

[ACGH] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A., Harris, J., *Geometry of Algebraic Curves*, Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **267**, 1985.

[Fu] Fulton, W., *Algebraic Curves*, Benjamin, New York, 1969.

[GH] Griffiths, P. A., Harris, J., *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley Interscience, New York, 1978.

[Go] Gordon, W. J., A linear algebra proof of Clifford's theorem, *Enseign. Math.* 2 **30** (1984), no. 1-2, 85–94.

[Ha] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer, GTM **52**, 1977.

[Se1] Serre, J.-P., *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.

[Se2] Serre, J.-P., *Local fields*, Springer, GTM **67**, 1979.

[Sx] Stix, J., Notizen zu Residuen, Dualität und Riemann-Roch auf Kurven.

[Ta] Tate, J., Residues of differentials on curves, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **1**, 4 (1968), 149–159.