Universität Bonn
Mathematisches Institut
Prof. Dr. M. Rapoport, Dr. J. Stix

Vortragsliste für das Proseminar

Endliche Spiegelungsgruppen

— Sommersemester 2004, Di 16–18, SR C —

1. **Dimension 2.** Spiegelungen, Drehungen, Diedergruppe, Fundamentalbereich für die Diedergruppe [GB] II.1+2, endliche orthogonale Untergruppen in Dimension 2 [GB] Thm II.2.1. Es muß auch ein wenig über orthogonale Abbildungen gesprochen werden.

2. **Platonische Körper.** Die fünf Platonischen Körper [GB] S.12–15, [Cx] X.2, Eulersche Polyederformel [Cx] X.3, [RT] XIIa, die Platonischen Körper sind die einzigen regulären Polyeder, Dualität [Cx] X.3, [RT] XIIb, die Rotationsgruppen der Platonischen Körper [Ar] VI.2.6.

3. **Rotationsgruppen in Dimension 3.** Drehungen in Dimension 3 [GB] Thm II.3.1, Gruppenoperationen [Ar] V.5–7, Rotationsgruppen in Dimension 3 [GB] II.4 (Thm II.5.2(a)), [Ar] V.9.

4. **Endliche Gruppen in Dimension 3.** Jede endliche Gruppe linearer Transformationen ist in $\mathrm{Gl}(V)$ konjugiert zu einer Gruppe orthogonaler Transformationen [Ar] IX.2, jede Gruppe orthogonaler Transformationen hat eine Untergruppe von Index ≤ 2 bestehend aus Rotationen [GB] Prop II.5.1, Klassifikation in Dimension 3 [GB] Thm II.5.2.

5. **Wurzelsysteme.** Spiegelungen, Definition Spiegelungsgruppe, Wurzeln, Wurzelsysteme, Weylgruppe zu einem Wurzelsystem, die Weylgruppe ist endlich [Hu] I.2, [GB] IV.1 bis Prop IV.1.3, positive/negative Wurzeln, Basen und einfache Wurzeln, Existenz von Basen, Lemma von der Stumpfwinkligkeit, [Hu] I.3, [GB] IV.1 bis Prop IV.1.8.

6. **Einfache Wurzeln.** Je zwei Basen sind konjugiert [Hu] I.4, einfache Wurzeln erzeugen die Spiegelungsgruppe, jede Wurzel kann einfache Wurzel sein [Hu] I.5, [GB] IV.1.9–12.

7. **Fundamentalbereiche.** Definition, etwas über metrische Topologie auf euklidischen Räumen, Beschreibung von Fundamentalbereichen endlicher Untergruppen der orthogonalen Gruppe [GB] III.

8. **Fundamentalbereiche für endliche Spiegelungsgruppen.** Beschreibung eines Fundamentalbereichs zu einer Basis [Hu] I.12, [GB] IV.2 Thm IV.2.4, das Wurzelsystem erschöpft die Menge der Spiegelungen [Hu] I.14, [GB] IV.2 Thm IV.2.5.

9. **Coxetergraphen/Klassifikation 1.** Graphen, Coxetergraphen, der Coxetergraph bestimmt die endliche Spiegelungsgruppe, positive Definitheit, Zusammenhang des Coxetergraphen und Produktzerlegung [GB] V.1 bis Prop V.1.4, [Hu] II.1-3.

10. **ADE–Kombinatorik/Klassifikation 2.** ADE–Graphen [Hi] I §4 Thm 4.2, Semidefinitheitslemma [Hu] II.6 Prop, Klassifikation zusammenhängender, positiv definiter Coxetergraphen [Hi] I §4 Thm 4.2 – Thm 4.8, [Hu] II.4–7, [GB] V Thm 5.1.7.

11. **Konstruktion von Spiegelungsgruppen.** Existenz von endlichen Spiegelungsgruppen zu vorgegebenem, positiv definitem Coxetergraphen [GB] V.3 insbesondere Thm V.3.1, [Hu] II.10, II.12+13.

12. **Kristallographisches.** Gitter, kristallographische Bedingung, kristallographische Wurzelsysteme, Unmöglichkeit fünfzähliger Symmterie, Punktgruppen, Klassifikation [GB] II.6, V.2, [Hu] II.8+9, [Ar] V.4.11, [Ya] III.

13. **Parabolische Untergruppen und der Coxeterkomplex.** Parabolische Untergruppen [Hu] I.13, Stabilisatoren der natürlichen Operation [Hu] I.15, der Coxeterkomplex [Hu] I.15, Beispiele [GB] IV.2 nach Thm IV.2.5.

Literatur

[Ar] Artin, M., *Algebra*, Birkhäuser Advanced Texts (1993).

[Cx] Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, John Wiley (1969), 2nd edition.

[GB] Grove, L. C., Benson, C. T., *Finite Reflection Groups*, Graduate Texts in Math. **99**, Springer (1985), 2nd edition.

[Hu] Humphreys, J. E., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**, Cambridge Univ. Press (1990).

[Hi] Hiller, H., *Geometry of Coxeter Groups*, Research Notes in Mathematics **54**, Pitman (1982).

[RT] Rademacher, H., Toeplitz, O., *Von Zahlen und Figuren*, Heidelberger Taschenbücher **50**, Springer (2000), Nachdruck.

[Ya] Yale, P. B., *Geometry and Symmetry*, Holden-Day (1968).