Mathematisches Institut Bonn
Prof. M. Rapoport
Torsten Wedhorn

Seminar Bruhat-Tits-Gebäude

Bruhat-Tits-Gebäude sind das p-adische Analogon zu den symmetrischen Räumen. Jeder p-adischen Lie-Gruppe G (z.B. $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$, $G = SL_n(\mathbb{Q}_p)$ oder $G = Sp_{2n}(\mathbb{Q}_p)$) kann man ein solches Gebäude $BT(G)$ zuordnen. Das Gebäude $BT(G)$ ist ein vollständiger metrischer Raum, auf dem die Gruppe G operiert. Wir werden uns in diesem Seminar in einem ersten Teil mit der Definition der Bruhat-Tits-Gebäude und der Untersuchung einiger zentraler Beispiele beschäftigen. In einem zweiten Teil soll es dann je nach Interessenlage der Teilnehmer um Anwendungen innerhalb der arithmetischen Geometrie oder der Darstellungstheorie p-adischer Gruppen gehen.

Wir orientieren uns im Wesentlichen an dem zweiten Kapitel des Buches von MacDonald [Ma], und alle Literaturangaben beziehen sich auf dieses zweite Kapitel, sofern nicht explizit anders angegeben. Die Originalartikel von Bruhat und Tits ([BT1] – [BT5]) und das Buch von Landvogt [La] sind eher schwieriger zugänglich, da sie Vorkenntnisse in der Theorie der reduktiven Gruppen voraussetzen. Einen Überblick kann hier [BT6] vermitteln. Die Bücher von Brown [Br] und Garrett [Ga] entwickeln die allgemeine Theorie der Gebäude und betrachten Bruhat-Tits-Gebäude als Spezialfall (in [Br] "Euklidische Gebäude" und in [Ga] "Affine Gebäude" genannt). Das Buch von Serre [Se] betrachtet den Spezialfall des Bruhat-Tits-Gebäudes assoziiert zu $SL_2(K)$, wobei K ein lokaler Körper ist.

Wenn es Fragen zum Seminar gibt, können diese jederzeit an wedhorn@mi.uni-koeln.de gerichtet werden.

Liste der Vorträge:

(1) BN-Paare
(2) Wurzelsysteme
(3) Das Gebäude zu einem affinen Wurzelsystem
(4) Das Bruhat-Tits-Gebäude einer p-adischen Lie-Gruppe
(5) Cartan- und Iwasawa-Zerlegung

1. Vortrag: BN-Paare

(a) Definiere BN-Paare (2.3) (siehe auch [Bou] chap. IV, §2).

(b) Erläutere das Beispiel $G = GL_n(k)$, B die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen und N die Gruppe der Monomialmatrizen ([Bou] chap. IV, §2.2).

(c) Definition eines Coxeter-Systems ([Bou] chap. IV, §1, Déf. 3) und der Länge eines Elements in einer Coxetergruppe ([Bou] chap. IV, §1.1).

(d) Beweise die Bruhat-Zerlegung (2.3.1) ([Bou] chap. IV, §2.3).

(e) Beweise, dass für ein BN-Paar das Paar (W, S) ein Coxeter-System ist und dass (2.3.7) gilt ([Bou] chap. IV, §2.4).

(f) Beweise die Aussagen (2.3.2) – (2.3.6) ([Bou] chap. IV, §2.5 und §2.6) und erläutere sie am Beispiel aus (b).

(g) Zeige, dass

$$G = SL_2(\mathbb{Q}_p),$$
$$B = \{g \in SL_2(\mathbb{Z}_p) \mid g \text{ modulo } p \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix}\},$$
$$N = \{g \in G \mid \text{In jeder Zeile und Spalte hat } g \text{ nur einen Koeffizienten} \neq 0.\},$$
$$S = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p^{-1} & 0 \end{pmatrix}\}$$

ein BN-Paar definiert.

2. Vortrag: Wurzelsysteme

(a) Wurzelsysteme (2.1) (siehe auch [Bou] chap. VI, §1).

(b) Affine Wurzeln (2.2).

(c) Das Beispiel des Wurzelsystems vom Typ (A_l). Verdeutliche alle Begriffe auch zeichnerisch für $l = 2$.

3. Vortrag: Das Gebäude zu einem affinen Wurzelsystem

(a) Definiere das Gebäude assoziiert zu einem BN-Paar mit affiner Weylgruppe (2.4)

(b) Appartments als euklidische Vektorräume (2.4.1) – (2.4.5).

(c) Das Gebäude als vollständiger metrischer Raum (2.4.6) – (2.4.10).

(d) Das Beispiel des Gebäudes assoziiert zu dem BN-Paar im ersten Vortrag (g) ([Se] chap. II, §1 und [Ga] chap. 19).

(e) Fixpunktsatz (2.4.11) – (2.4.15).

4. Vortrag: Das Bruhat-Tits-Gebäude einer p-adischen Lie-Gruppe

(a) Definition einer affinen Wurzelstruktur auf einer Gruppe (2.5.3) und Definition einer Gruppe vom p-adischen Typ (Anfang von (2.7) enschließlich (2.7.1) bis (2.7.3)).

(b) Betrachte die Gruppe vom p-adischen Typ $G = SL_n(\mathbb{Q}_p)$ und das assoziierte Gebäude. Erläutere alle bisherigen Begriffe an diesem Beispiel ([Ga] chap. 18 und 19, siehe auch den ersten Teil von [BT4]).

5. Vortrag: Cartan- und Iwasawa-Zerlegung

(a) Beweis der Cartan- und der Iwasawa-Zerlegung (2.6).

(b) Erkläre die Aussage von (2.6.11) am Beispiel von $SL_n(\mathbb{Q}_p)$.

Literatur:

[Bou] N. Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4,5 et 6, Masson, Paris, 1981.

[BT1] F. Bruhat, J. Tits: *Groupes réductifs sur un corps local*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 41 (1972), 5–251.

[BT2] F. Bruhat, J. Tits: *Groupes réductifs sur un corps local II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 60 (1984), 197–376.

[BT3] F. Bruhat, J. Tits: *Groupes algébriques sur un corps local III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 34 (1987), no. 3, 671–698.

[BT4] F. Bruhat, J. Tits: *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. France 112 (1984), no. 2, 259–301.

[BT5] F. Bruhat, J. Tits: *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local II. Groupes unitaires*, Bull. Soc. Math. France 115 (1987), no. 2, 141–195.

[BT6] F. Bruhat, J. Tits: *Groupes algébriques simple sur un corps local*, in Proceedings of a conference on local fields, Springer, 1967.

[Br] K.S. Brown: *Buildings*, Springer, 1996.

[Ga] P. Garrett: *Buildings and Classical Groups*, Chapman and Hall, 1997.

[La] E. Landvogt: *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lecture Notes in Mathematics, 1619. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Ma] I.G. Macdonald: *Spherical functions on a group of p-adic type*, Publications of the Ramanujan Institute, No. 2. Ramanujan Institute, Centre for Advanced Study in Mathematics, University of Madras, Madras, 1971.

[Se] J.P. Serre: *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque, No. 46. Société Mathématique de France, Paris, 1977.