Oberseminar Arithmetische Geometrie, WS 06/07

Den größten Teils unseres Oberseminars werden wir dem Studium von Iwahori-Hecke-Algebren widmen. Wir beginnen mit dem Artikel [HKP03] von Haines, Kottwitz und Prasad, und werden dazu noch einige weitere Quellen studieren.

Eine Anwendung, in der diese Theorie eine wichtige Rolle spielt, ist die Berechnung des lokalen Faktors der (halbeinfachen) Hasse-Weil-Zetafunktion von “fake unitary” Shimura-Varietäten als Produkt von (halbeinfachen) lokalen Faktoren automorpher L-Funktionen, wie es im Rahmen des Langlands-Programms erwartet wird. Haines und Ngô haben einen Beweis für die Instanz des “fundamentalen Lemmas” (Basiswechsel für Funktionen im Zentrum der Iwahori-Hecke-Algebra, bzw. allgemeiner für Hecke-Algebren zu parahorischen Untergruppen), die in diesem Fall benötigt wird, angekündigt.

Wir werden nach dem ersten Teil über Hecke-Algebren einen kurzen zweiten Teil einschieben, in dem Langlands’ Strategie für die Berechnung der Zeta-Funktion umrissen wird, und uns dann im dritten Teil mit dem fundamentalen Lemma beschäftigen.

1 Hecke-Algebren

In diesem Teil des Seminars eignen wir uns das nötige Grundwissen an, um den Beweis des fundamentalen Lemmas verstehen zu können.

1.1 Grundlagen über die Iwahori-Hecke-Algebra

1. Bernstein-Darstellung und das Zentrum der Iwahori-Hecke-Algebra (1–2 Sitzungen)

[HKP03], §§1,2. Vergleiche auch den Artikel [Ber84] von Bernstein/Deligne.

2. Der Satake-Isomorphismus (1 Sitzung)

[HKP03] §§3, 4.

3. Die MacDonald-Formel und die Casselman-Shalika-Formel (1–2 Sitzungen)

[HKP03] §§5, 6.

5. Die Kato-Lusztig-Formel (1 Sitzung)

[HKP03] §7.

6. GL_n

In diesem Vortrag wollen wir das Behandelte noch einmal speziell im Fall der allgemeinen linearen Gruppe GL_n ansehen. Siehe zum Beispiel [Rog85]. *(Gibt es dazu noch bessere Quellen?)*

1.2 Weiterführende Ergebnisse

7. Das Paley-Wiener-Theorem (1 Sitzung)

Nach Bernstein, Deligne, Kazhdan [BDK86], siehe auch Kapitel A.5 in dem Artikel von Deligne, Kazhdan, Vignéras [DKV84]. Vergleiche auch Rogawskis Artikel [Rog88] über den getwisteten Fall.

8. Kazhdan's Dichtheitssatz (1 Sitzung)

Nach [Kaz86].

2 Die Hasse-Weil-Zetafunktion von Shimuravarietäten

9. Übersicht über die Beweisstrategie (1 Sitzung)

Einen Überblick über Langlands' Strategie gibt der Artikel [Hai05] von Haines, §§9–11. Ein weiterer Übersichtsartikel über die allgemeine Strategie ist der Artikel [Cas79] von Casselman.

Natürlich sind auch die entsprechenden Artikel von Langlands, vor allem [Lan77] und [Lan79] lesenswert. Darüberhinaus ist die Strategie im Falle "einfacher" Shimura-Varietäten mit guter Reduktion von Kottwitz durchgeführt worden, siehe zum Beispiel [Kot92], [Kot90]. In [Rap90] und [Rap88] diskutiert Rapoport Fälle mit schlechter Reduktion.

Das "Zählen der Punkte" sollten wir an dieser Stelle als black box benutzen. Die Spurformel benötigen nur in einem sehr einfachen Fall. (Zur Spurformel siehe zum Beispiel [Lab86], Kapitel A.1 in [DKV84] oder [Art05].) Hier ist es daher vielleicht am sinnvollsten, stattdessen den Artikel [Kot84] von Kottwitz heranzuziehen.

3 Das fundamentale Lemma

10. Basiswechsel für Einheiten der Iwahori-Hecke-Algebra (1 Sitzung)

Zum Einstieg studieren wir den Artikel [Kot86] von Kottwitz, in dem ein relativ einfacher Fall des fundamentalen Lemmas bewiesen wird. Dieses Ergebnis wird in den Beweisen von Clozel und Labesse für den allgemeinen (sphärischen) Fall verwendet.

11. Basiswechsel in allgemeineren Fällen (2–3 Sitzungen)

Im Fall guter Reduktion (siehe [Kot92]) benötigt man den Basiswechsel für beliebige Elemente der Hecke-Algebra zu einer hyperspeziellen parahorischen Untergruppe. Der erste Beweis für diesen Fall des fundamentalen Lemmas stammt von Clozel [Clo90]. Labesse [Lab90] hat den Beweis deutlich vereinfacht.

Im allgemeinen parahorischen Fall genügt es, Basiswechsel für Elemente im Zentrum der entsprechenden Hecke-Algebra durchführen zu können. Wie oben erwähnt, haben Haines und Ngô einen Beweis dafür angekündigt. Sofern rechtzeitig ein Manuskript von Haines und Ngô vorliegt, sollten wir ihren Beweis besprechen.

Literatur

[Art05] James Arthur. An introduction to the trace formula. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, volume 4 of *Clay Math. Proc.*, pages 1–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[BDK86] J. Bernstein, P. Deligne, and D. Kazhdan. Trace Paley-Wiener theorem for reductive p-adic groups. *J. Analyse Math.*, 47:180–192, 1986.

[Ber84] J. N. Bernstein. Le "centre" de Bernstein. In *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, pages 1–32. Hermann, Paris, 1984. Edited by P. Deligne.

[Cas79] W. Casselman. The Hasse-Weil ζ-function of some moduli varieties of dimension greater than one. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 141–163. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Clo90] Laurent Clozel. The fundamental lemma for stable base change. *Duke Math. J.*, 61(1):255–302, 1990.

[DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras. Représentations des algèbres centrales simples p-adiques. In *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, pages 33–117. Hermann, Paris, 1984.

[Hai05] Thomas J. Haines. Introduction to Shimura varieties with bad reduction of parahoric type. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, volume 4 of *Clay Math. Proc.*, pages 583–642. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. math.AG/0409482.

[HKP03] Thomas Haines, Robert Kottwitz, and Amritanshu Prasad. Iwahori-hecke algebras. *Preprint* math.RT/0309168, 2003.

[Kaz86] David Kazhdan. Cuspidal geometry of p-adic groups. *J. Analyse Math.*, 47:1–36, 1986.

[Kot84] Robert E. Kottwitz. Shimura varieties and twisted orbital integrals. *Math. Ann.*, 269(3):287–300, 1984.

[Kot86] Robert E. Kottwitz. Base change for unit elements of Hecke algebras. *Compositio Math.*, 60(2):237–250, 1986.

[Kot90] Robert E. Kottwitz. Shimura varieties and λ-adic representations. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 10 of *Perspect. Math.*, pages 161–209. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Kot92] Robert E. Kottwitz. On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties. *Invent. Math.*, 108(3):653–665, 1992.

[Lab86] Jean-Pierre Labesse. La formule des traces d'Arthur-Selberg. *Astérisque*, (133-134):73–88, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.

[Lab90] J.-P. Labesse. Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable. *Duke Math. J.*, 61(2):519–530, 1990.

[Lan77] R. P. Langlands. Shimura varieties and the Selberg trace formula. *Canad. J. Math.*, 29(6):1292–1299, 1977.

[Lan79] R. P. Langlands. On the zeta functions of some simple Shimura varieties. *Canad. J. Math.*, 31(6):1121–1216, 1979.

[Rap88] M. Rapoport. On the local zeta function of quaternionic Shimura varieties with bad reduction. *Math. Ann.*, 279(4):673–697, 1988.

[Rap90] M. Rapoport. On the bad reduction of Shimura varieties. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 11 of *Perspect. Math.*, pages 253–321. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Rog85] J. D. Rogawski. On modules over the Hecke algebra of a p-adic group. *Invent. Math.*, 79(3):443–465, 1985.

[Rog88] J. D. Rogawski. Trace Paley-Wiener theorem in the twisted case. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 309(1):215–229, 1988.