Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

9. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung eines Körpers K und sei $0 < a < 1$ eine reelle Zahl. Für $x, y \in K$ sei $d(x, y) = a^{v(x-y)}$.

1. Zeigen Sie, daß dies eine Metrik auf K definiert, d.h. es gelten $d(x, y) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x = y$, sowie $d(x, y) = d(y, x)$ und die Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
2. Zeigen Sie, daß die durch d induzierte Topologie nicht von der Wahl von a abhängt.
3. Sei R der Bewertungsring zu v und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal. Zeigen Sie, daß die $\mathfrak{m}^n$, $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsbasis von 0 für die von d auf R induzierte Topologie bilden.

Aufgabe 2:

a) Sei R ein Dedekindring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale von R. Zeigen Sie: Gilt $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{b}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}^+$, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

b) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist ein Dedekindring. Zerlegen Sie das Ideal (6) in diesem Ring in Primideale. Wie läßt sich dann die Zerlegung $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ interpretieren?

Aufgabe 3:

Ein Dedekindring A mit nur endlich vielen Primidealen ist ein Hauptidealring.

Hinweis: Ist $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{n_m}$ ein Ideal, so wähle man $x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_i^2$ und wende den chinesischen Restsatz (Satz 1.7) auf die Restklassen von $x_i^{n_i}$ in $A/\mathfrak{p}_i^{n_i+1}$ an.

Aufgabe 4:

Sei R ein Integritätsbereich und S eine multiplikative Teilmenge. Zeigen Sie, daß für jedes gebrochene Ideal I gilt, daß $S^{-1}(I^{-1}) = (S^{-1}I)^{-1}$. Hierbei bezeichnet S^{-1} die Lokalisierung an S und I^{-1} das Inverse gebrochene Ideal.

Abgabe: Donnerstag, 17. Dezember 2009.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/