Dr. E. Viehmann WS 2009/10

**Algebra II – Kommutative Algebra**

**6. Übungsblatt**

**Aufgabe 1:**

Sei $A$ ein Ring und $B$ eine endlich erzeugte ganze Erweiterung von $A$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $A$. Zeigen Sie, daß es nur endlich viele Primideale von $B$ gibt, die über $\mathfrak{p}$ liegen.

**Hinweis:** Betrachten Sie $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ als $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-Vektorraum, um zu zeigen, daß $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ artinsch ist.

**Aufgabe 2:**

Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung. Zeigen Sie, daß die induzierte Abbildung $f^a : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ abgeschlossen ist, also, daß das Bild jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathrm{Spec}(B)$ abgeschlossen ist.

**Aufgabe 3:**

Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung. Sei $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal von $B$ und $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$. Zeigen Sie, daß $B_\mathfrak{n}$ im allgemeinen nicht ganz über $A_\mathfrak{m}$ ist.

**Hinweis:** Betrachten Sie den Unterring $k[X^2 - 1]$ von $k[X]$ ($k$ ein Körper) und das von $X - 1$ erzeugte Ideal.

**Aufgabe 4:**

Sei $A$ ein Ring und $X \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ die Teilmenge der maximalen Ideale mit der induzierten Topologie. Dann sind äquivalent

1. $A$ ist Jacobson.
2. Ist $Y \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ abgeschlossen, so ist $Y$ der Abschluß von $Y \cap X$.
3. Ist $Y \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ lokal abgeschlossen und nicht leer, so ist $Y \cap X$ nicht leer.

Hierbei ist eine Teilmenge eines topologischen Raumes $M$ lokal abgeschlossen, falls sie Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von $M$ ist, oder äquivalent dazu, falls sie offen in ihrem Abschluß in $M$ ist.

Abgabe: Donnerstag, 26. November 2009.

**Homepage:**
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/