Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

3. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei A ein noetherscher Ring und $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in A[[x]]$. Zeigen Sie, daß f genau dann nilpotent ist wenn jedes a_i nilpotent ist.

Aufgabe 2:
Sei A ein Ring. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ sei $A_{\mathfrak{p}}$

a) reduziert.

b) ein Ganzheitsring.

c) noethersch.

Untersuchen Sie für jede der drei Bedingungen, ob sie dann auch für A gilt.

Aufgabe 3:
Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind äquivalent:

a) M ist frei.

b) M ist flach.

c) Die kanonische Abbildung $\mathfrak{m} \otimes M \to A \otimes M$ ist injektiv.

d) $\mathrm{Tor}_1^A(k, M) = 0$.

Hinweis: Für d)$\Rightarrow$ a) verwende man Proposition 2.6 und Nakayamas Lemma.

Aufgabe 4: Sei A ein Ring und M ein A-Modul.

a) $M = 0$ genau dann wenn $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A.

b) Ist M endlich erzeugt, so ist $M = 0$ genau dann wenn $M \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A.

c) Eine Sequenz $M \to N \to P$ von A-Moduln ist genau dann exakt, wenn $M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A exakt ist.

Abgabe: Donnerstag, 5. November 2009.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/