Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei A ein Ring und I ein endlich erzeugtes Ideal mit $I = I^2$. Dann wird I durch ein Idempotent e (d.h. ein Element mit $e^2 = e$) erzeugt.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie Nakayamas Lemma ohne die Verwendung von Determinanten: Verwenden Sie Induktion nach der minimalen Anzahl von Erzeugern von M und $\mathfrak{a}M = M$, um ein geeignetes Vielfaches eines der Erzeuger durch die anderen auszudrücken.

Aufgabe 3:
Seien $I_1, \ldots, I_n$ Ideale eines Rings A mit $I_1 \cap \ldots \cap I_n = (0)$. Sei A/I_i noethersch für jedes i. Zeigen Sie, daß A noethersch ist.

Aufgabe 4:
Ein topologischer Raum X heißt noethersch wenn die offenen Teilmengen von X die aufsteigende Kettenbedingung erfüllen, oder äquivalent dazu, wenn die abgeschlossenen Teilmengen die absteigende Kettenbedingung erfüllen.

1. Ist X noethersch, so auch jeder Unterraum.
2. Ist X noethersch, so ist X quasi-kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
3. Ist A ein noetherscher Ring, so ist $\mathrm{Spec}(A)$ ein noetherscher topologischer Raum. Gilt auch die Umkehrung?

Abgabe: Donnerstag, 29. Oktober 2009.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/