Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

10. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) Sei R ein bezüglich eines Ideals I vollständiger Ring. Sei M ein separierter R-Modul und seien $x_1, \ldots, x_n \in M$ Erzeuger von M/IM. Dann sind die x_i auch Erzeuger von M.
(Ein Analogon von Nakayamas Lemma, das nicht voraussetzt, daß M endlich ezeugt ist.)

b) Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring und seien M, N endlich erzeugte R-Moduln mit $\hat{M} \cong \hat{N}$ als Moduln über der Komplettierung $\hat{R}$. Zeigen Sie, daß $M \cong N$ als R-Moduln.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\hat{M}, \hat{N})$.

Aufgabe 2:
Sei A ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann ist die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung $\hat{A}$ von A wieder ein diskreter Bewertungsring.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $x^2 = 2$ eine Lösung in $\mathbb{Z}_7$ hat und berechnen Sie x modulo (7^3).

b) Zeigen Sie, daß eine p-adische Zahl $a = \sum_{i=-c}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Q}_p$ mit $a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ genau dann rational ist, wenn die Ziffernfolge schließlich periodisch ist.

Hinweis: Schreiben Sie $p^m a = b + p^l \frac{c}{1-p^n}$ mit $0 \leq b < p^l, 0 \leq c < p^n$.

Aufgabe 4:
Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein vollständiger noetherscher lokaler Ring und $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ eine Kette von Idealen mit $\bigcap I_j = (0)$. Dann gibt es für jedes n ein $\nu(n)$ mit $I_{\nu(n)} \subseteq \mathfrak{m}^n$.

Hinweis: Zeigen Sie, daß es ein $\nu(n)$ mit $I_{\nu(n)} + \mathfrak{m}^n = I_j + \mathfrak{m}^n$ für alle $j \geq \nu(n)$ gibt.

Abgabe: Donnerstag, 7. Januar 2010.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/

Ein frohes Weihnachtsfest!