Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

1. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eine Ringes A. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{p}[x]$ ein Primideal des Polynomringes $A[x]$ ist.
2. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A. Ist $\mathfrak{m}[x]$ ein maximales Ideal von $A[x]$?

Aufgabe 2:
Seien A, B Ringe. Zeigen Sie, daß es einen Homöomorphismus zwischen $\operatorname{Spec}(A \times B)$ und der disjunkten Vereinigung $\operatorname{Spec}(A) \sqcup \operatorname{Spec}(B)$ gibt, wobei $\operatorname{Spec}(A)$, $\operatorname{Spec}(B)$ beide offen und abgeschlossen in der Vereinigung sind.

Hinweis: Zeigen Sie dazu, daß jedes Primideal von $A \times B$ von der Form $\mathfrak{p} \times B$ oder $A \times \mathfrak{q}$ mit Primidealen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ist.

Aufgabe 3:
Sei $A \neq 0$ ein Ring. Zeigen Sie, daß die Menge der Primideale von A minimale Elemente bezüglich der Inklusion besitzt.

Aufgabe 4:
Ein nichtleerer topologischer Raum X heißt irreduzibel, falls je zwei offene nichtleere Teilmengen nichtleeren Schnitt haben. Dies ist äquivalent dazu, daß der Abschluß jeder offenen nichtleeren Teilmenge gleich X ist.

1. Ist $Y \subseteq X$ ein irreduzibler Unterraum von X, so ist auch der Abschluß $\overline{Y}$ von Y irreduzibel.
2. Jeder irreduzible Unterraum von X ist in einem maximalen irreduziblen Unterraum enthalten. Die maximalen irreduziblen Unterräume von X sind abgeschlossen und überdecken X. Sie werden als irreduzible Komponenten von X bezeichnet.
3. Ist $X = \operatorname{Spec}(A)$ für einen Ring A und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so ist $V(\mathfrak{p}) \subseteq X$ irreduzibel. Die irreduziblen Komponenten von X sind die abgeschlossenen Mengen $V(\mathfrak{p})$ wobei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von A ist (vgl. Aufgabe 3).

Abgabe: Donnerstag, 22. Oktober 2009.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/